# Beweis durch Induktion, Berechnung der Grenzwerte, Umkehrfunktion, Berechnung der Grenzwerte

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

08. 05. 2013

# Beweis durch Induktion

# Beweis durch Induktion

# Beweis durch Induktion

# Beweis durch Induktion

Aufgabe 1

Durch die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad a_0 = 0\,, a_1 = 1\,,$$

wird die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man durch vollständige Induktion:

$$a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n\,.$$

Lösung

1. Induktionsanfang: n=1

$$a_{1+1} = a_1 + a_{1-1} \Longleftrightarrow a_2 = a_1 + a_0 = 0 + 1 = 1 \Longleftrightarrow a_2 = 1\,.$$

$$a_2\, a_0 - a_1^2 = 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$$

# Beweis durch Induktion

(b) Induktionsannahme
Wir nehmen an, dass $a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$ für irgend ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Induktionsschluss
Zu zeigen ist es:

$$a_{(n+1)+1} a_{(n+1)-1} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \quad \text{d.h} \quad a_{n+2} a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+2} a_n - a_{n+1}^2 &= (a_{n+1} + a_n) a_n - a_{n+1}^2 \quad \text{da} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\
&= a_{n+1} a_n + a_n^2 - a_{n+1}^2 \\
&= a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) + a_n^2 \\
&= a_{n+1}(-a_{n-1}) + a_n^2, \quad \text{da} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\
&= -(a_{n+1} a_{n-1} - a_n^2) \\
&= -(-1)^n \quad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

# Umkehrfunktion

**Aufgabe 1**

Man berechne die Inverse der folgende Funktionen

(a)

$$f(x) = -7x + 5$$

(b)

$$h(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

**Lösung**

(a)

$$\begin{aligned} f(x) = -7x + 5 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = -7x + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad 7x = -y + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-y+5}{7} \\ &\Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{7} \end{aligned}$$

# Umkherfunktion

(b)

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{x-1}{2x+3} \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \\ &\Longleftrightarrow \quad y(2x+3) = x-1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2yx + 3y = x - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2yx - x = -3y - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(2y-1) = -3y-1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-3y-1}{2y-1}, \quad y \neq \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{2x-1} \quad x \neq \frac{1}{2}\ . \end{aligned}$$

# Umkherfunktion

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (x-3)(x-4)\ .$$

Man suche die größtmöglichen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung von $f$ auf $D$ umkehrbar wird, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.

(größtmöglichen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung von $f$ auf $D$ umkehrbar wird)

$$\begin{aligned} h(x) = (x-3)(x-4) &= (x-3)(x-4) \\ &= x^2 - 7x + 12 \\ &= (x - \frac{7}{2})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 \\ &= (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$D_1 = (-\infty, \frac{7}{2}] \quad D_2 = [\frac{7}{2}, \infty)$$

Auf $D_1$ bzw. $D_2$ ist die Funktion umkehrbar.

# Umkherfunktion

Aufgabe 2 Aus des obigen Teil haben wir

$$h(x) = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{12} \iff y = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

$$\iff (x - \frac{7}{2})^2 = y + \frac{1}{4}$$

$$\iff (x - \frac{7}{2}) = \pm\sqrt{y + \frac{1}{4}}, \quad y \geq -\frac{1}{4}$$

$$\implies x = \sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{y + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2}$$

$$\implies f_a^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad f_b^{-1}(x) = -\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2}\ .$$

$$D_1 = (-\infty, \frac{7}{2}] \quad D_2 = [\frac{7}{2}, \infty)$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad \text{für} \quad D_2 \quad \text{und} \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad \text{für} \quad D_1\ .$$

# Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 2

Man bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = \infty - \infty \; = ???$$

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{(n+1) - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{-1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{-1}{\infty + \infty} = 0\,.$$

# Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 3 Man zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \quad \text{Hinweis:} \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)} .$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1+1}^{\infty} \frac{1}{k+2-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{1+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$

# Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 3 Man berechne

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$