Verkettung-Ableitungen, Monotonie einer Funktion, Hyperbelfunktionen

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

15. 05. 2013

Verkettung-Ableitungen

Verkettung-Ableitungen

Verkettung-Ableitungen

Verkettung-Ableitungen

Aufgabe 2

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{2x+3}\,, \quad g(x) = x^2 + 2x$$

(a) Man berechne die Verkettungen $f \circ g$ sowie $g \circ f$.

(b) Man berechne die Ableitung $(g \circ f)'(x)$ sowohl mit direktem Weg als auch mit der Kettenregel.

Lösung: (a Teil 1)

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= f[x^2 + 2x] \\ &= \sqrt{2(x^2+2x)+3} \\ &= \sqrt{2x^2+4x+3} \end{aligned}$$

Verkettung-Ableitungen

Lösung: (a Teil 2)

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= g[\sqrt{2x+3}] \\ &= \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2\sqrt{2x+3} \\ &= 2x+3+2\sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

b) Teil 1: Berechnung von $(g \circ f)'(x)$: mit dem direktem Weg

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= \left(2x+3+2\sqrt{2x+3}\right)' \qquad \sqrt{f} = \frac{f'}{2\sqrt{f}} \\ &= 2 + 2\frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= 2 + \frac{2}{\sqrt{2x+3}} \\ &= 2 + \frac{2\sqrt{2x+3}}{2x+3} \end{aligned}$$

Verkettung-Ableitungen

b) Teil 2 Berechnung von $(g \circ f)'(x)$: mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= f'(x) \cdot g'[f(x)] \\
&= (\sqrt{2x+3})' \cdot g'[\sqrt{2x+3}] \quad \text{mit} \quad g'(x) = 2x+2 \\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \cdot (2(\sqrt{2x+3}) + 2) \\
&= 2 + \frac{2}{\sqrt{2x+3}} \\
&= 2 + \frac{2\sqrt{2x+3}}{2x+3}
\end{aligned}$$

Monotonie einer Funktion

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x} \; .$$

(i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.

(ii) Man skizziere f im Intervall $[-2, 6]$.

Monotonie einer Funktion

$f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x}$

(i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.

Extremalstelle

$$f'(x) = (2x+1-\frac{1}{2}(x^2+x-2))e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)e^{-\frac{1}{2}x}\ .$$

Extremalstellen an $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

Monotonie-Intervalle:

f ist monoton steigend für alle $x \in [-1, 4]$ da $f'(x) \geq 0$ auf dem Intervall und f ist monoton fallend für alle $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ da $f'(x) < 0$ auf dem Intervall.

(ii) Skizze von f im Intervall $[-1, 6]$ hier.

Hyperbelfunktionen

Aufgabe 3

Die Hyperbelfunktionen Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus sind erklärt durch:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Man zeige, dass

(a) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$

(b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

(c) die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$, genannt *arcsinh*(x) ist $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$.

Hyperbelfunktionen

Lösung: (a):

$$\begin{aligned}(\cosh(x))^2-(\sinh(x))^2 &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\\ &= \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}\\ &= \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4}\\ &= \frac{4}{4}\\ &= 1\,.\end{aligned}$$

Lösung: (b):

$$\sinh'(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-(-1)e^{-x}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x)\,.$$

$$\cosh'(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+(-1)e^{-x}}{2}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh(x)\,.$$

Hyperbelfunktionen

Lösung: (c): Umkehrfunktion von $\sinh(x)$

$$
\begin{aligned}
y = \sinh(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2y = e^x - e^{-x} \qquad /.e^x \\
&\Longleftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (e^x - y)^2 - (y)^2 - 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \qquad \sqrt{.} \\
&\Longleftrightarrow \quad e^x - y = \pm\sqrt{y^2 + 1} \\
&\Longleftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{oder} \quad e^x = y - \sqrt{y^2 + 1} \\
&\Longrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{da} \quad e^x > 0 \\
&\Longrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\
&\Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,.
\end{aligned}
$$