Partialbruchzerlegung, Integration durch Substitution

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

29. 05. 2013

Partialbruchzerlegung, Integration

Partialbruchzerlegung, Integration

Partialbruchzerlegung, Integration

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{(1+x^2)(1-2x)} \, .$$

(a) Partialbruchzerlegung:
Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

schreiben lässt.

(b) Man finde $\int f(x)dx$.

Partialbruchzerlegung, Integration

Partialbruchzerlegung:
Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

schreiben lässt.

$$f(x) = \frac{a(1+x^2)+(1-2x)(bx+c)}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{(a-2b)x^2+(b-2c)x+a+c}{(1-2x)(1+x^2)}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a-2b=-3, \quad b-2c=4 \quad a+c=0 \Longrightarrow a=1, b=2, c=-1\,.$$

somit

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{2x-1}{1+x^2}$$

Partialbruchzerlegung, Integration

Man finde $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = \int \frac{-3x^2+4x}{(1+x^2)(1-2x)}dx = \int \left(\frac{2x-1}{1+x^2}dx - \frac{1}{1-2x}dx\right)$$

$$= \int \frac{2x-1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1-2x}dx$$

$$= \int \frac{2x}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx - \left(-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{1-2x}\right)dx$$

$$= \ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1-2x| \,.$$

Integration-Substitution

Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx \ .$$

$$t = \sqrt{x+1} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Longrightarrow dx = 2\sqrt{x+1} dt = 2t dt \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt$$

Partielle Integration:

$$u = 2t \Longrightarrow u' = 2, \quad v' = e^t \Longrightarrow v = e^t \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t = 2te^t - 2e^t \ .$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 1) + K \ .$$

Integration-Substitution

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^4} \; .$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ mit der Substitution $x = \sqrt{t}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{1+x^4}\,dx &= \left(\int \frac{t^2\sqrt{t}}{1+t^2}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt\right)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt\right)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2}\,(t-\arctan(t)+c)_{t=x^2} \\
&= \frac{1}{2}\,(x^2-\arctan(x^2)+c)
\end{aligned}$$

Integration-Substitution

Aufgabe 3

Man berechne das folgende Integral ($b > a > 0$):

$$\int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - x^2}\, dx\,.$$

Man setzte $x = b\sin(t)$

$$x = b\sin(t) \Longrightarrow \quad dx = b\cos(t)dt \quad \text{und} \quad t = \arcsin(\frac{x}{b})$$

$$x = -a \Longrightarrow t = \arcsin(\frac{-a}{b}) = -\arcsin(\frac{a}{b}) \quad x = a \Longrightarrow t = \arcsin(\frac{a}{b})$$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} \sqrt{b^2 - b^2\sin^2(t)}\, b\cos(t)dt \\ &= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} \sqrt{b^2(1-\sin^2(t))} b\cos(t)dt\end{aligned}$$

Integration-Substitution

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} \sqrt{1-\sin^2(t)}\,b^2\cos(t)\,dt \\
&= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} \sqrt{\cos^2(t)}\,b^2\cos(t)\,dt \\
&= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} b^2\cos(t)\cos(t)\,dt \\
&= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} b^2\cos^2(t)\,dt \\
&= \int_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} b^2\left(\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\right)dt \\
&= b^2\left(\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t\right)\Big|_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})}
\end{aligned}
$$

Integration-Substitution

Aufgabe 3

$$
\begin{aligned}
&= b^2(\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t)\Big|_{-\arcsin(\frac{a}{b})}^{\arcsin(\frac{a}{b})} \\
&= b^2\left(\frac{1}{4}\sin(2(\arcsin(\frac{a}{b})) + \frac{1}{2}(\arcsin(\frac{a}{b}))\right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{4}\sin(2(-\arcsin(\frac{a}{b}))) + \frac{1}{2}(-\arcsin(\frac{a}{b}))\right) \\
&= b^2\left(\frac{1}{2}\sin(2(\arcsin(\frac{a}{b})) + (\arcsin(\frac{a}{b}))\right) \\
&= b^2\left(\frac{1}{2}2\cdot\sin(\arcsin(\frac{a}{b}))\cos(\arcsin(\frac{a}{b})) + (\arcsin(\frac{a}{b}))\right) \\
&= ab\cos(\arcsin(\frac{a}{b})) + b^2(\arcsin(\frac{a}{b}))
\end{aligned}
$$