Grenzwerte, Konvergenz von Integralen, Taylorpolynom

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

05. 06. 2013

Grenzwert

1 Grenzwert

2 Konvergenz von Integralen

3 Taylorpolynom

Grenzwert

1 Grenzwert

2 Konvergenz von Integralen

3 Taylorpolynom

Grenzwert

1. Grenzwert
2. Konvergenz von Integralen
3. Taylorpolynom

Grenzwert

Aufgabe 1

Sei $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $x \neq 0$. Man berechne $f'(x)$ und die Grenzwerte: $\lim_{x \to 0} f(x)$ und $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{-1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{0}} \\ &= e^{-\infty} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Integration-Substitution

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \infty \cdot 0\end{aligned}$$

Man setze $y = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} f'(x) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{2}{x^3}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} \\ &= \lim_{y \to \infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} \\ &= \frac{\infty}{\infty}\end{aligned}$$

Integration-Substitution

Aufgabe 1 Regel de l'Hospital

$$\lim_{y \to \infty} \frac{2y^3}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{(2y^3)'}{(e^{y^2})'} = \lim_{y \to \infty} \frac{6y^2}{2ye^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{3y}{e^{y^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Regel de l'Hospital

$$\lim_{y \to \infty} \frac{3y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{(3y)'}{(e^{y^2})'} = \lim_{y \to \infty} \frac{3}{2ye^{y^2}} = \frac{3}{\infty} = 0$$

Konvergenz von Integralen

Aufgabe 2

Konvergiert das folgende uneigentliche Integral?

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

Man setzte

$$I(t) = \int_1^{t} \frac{\ln(x)}{x^3} dx$$

und berechne $I(t)$. Dann ist $I = \lim\limits_{t \to \infty} I(t)$

Durch Partielle Integration

$$\begin{cases} u = \ln(x) \Longrightarrow u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x^3} \Longrightarrow v = \frac{-1}{2x^2} \end{cases}$$

$$I(t) = \ln(x) \cdot \frac{-1}{2x^2}\Big|_1^t - \int_1^t \frac{1}{x} \cdot (\frac{-1}{2x^2})$$

Integration-Substitution

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \ln(x)\cdot\frac{-1}{2x^2}\Big|_1^t - \int_1^t \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-1}{2x^2}\right) \\
&= \frac{-\ln(t)}{2t^2} + \frac{1}{2}\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dt \\
&= \frac{-\ln(t)}{2t^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2x^2}\Big|_1^t\,dt \\
&= \frac{-\ln(t)}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-\ln(t)}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.
$$

(Mit der Regel von l'Hospital)

Taylorpolynom

Aufgabe 2 Man berechne das Taylorpolynom von Grad 2 um $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x)}}) = (1+x)^{\frac{-1}{2}}$$

Lösung

$$T_n(f,x,x_0) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)(x_0)}(x-x_0)^n}{n!}+R$$

$$f(x_0) = f(0) = (1+0)^{\frac{-1}{2}} = 1\,.$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}(1+x)'(1+x)^{\frac{-1}{2}-1} = \frac{-1}{2}(1+x)^{\frac{-3}{2}} \Longrightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{-1}{2}\,.$$

$$f''(x) = \left(\frac{-1}{2}(1+x)^{\frac{-3}{2}}\right)' = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot(1+x)'(1+x)^{\frac{-3}{2}-1} = \frac{3}{4}(1+x)^{\frac{-5}{2}}$$

$$\Longrightarrow f''(x_0) = f''(0) = \frac{3}{4}\,.$$

Taylorpolynom

Aufgabe 2
Lösung

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = -\frac{1}{2} \quad f''(0) = \frac{3}{4} \,.$$

Aus der Formel

$$T_n(f, x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(x_0)}(x - x_0)^n}{n!} + R$$

folgt dass

$$T_2(f, x, 0) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 + R$$

$$\Longrightarrow T_2(f, x, 0) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + R$$

Taylorpolynom

Aufgabe 3 Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - \sqrt{1+x^3}}{x^3}$$

Hinweis: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^3)$

Lösung

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6)$$

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + o(x^9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x^2) - \sqrt{1+x^3}}{x^3} &= \frac{1 - \frac{x^4}{2} + o(x^6) - (1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + o(x^9))}{x^3} \\
&= \frac{-\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + o(x^6) + \frac{x^6}{8} + o(x^9))}{x^3} \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) + o(x^6)
\end{aligned}$$

Taylorpolynom

Aufgabe 3

$$\frac{\cos(x^2) - \sqrt{1+x^3}}{x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) + o(x^6)$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - \sqrt{1+x^3}}{x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{0}{2} + \frac{0^3}{8} = -\frac{1}{2} \,.$$