Konvergenz der Reihen,Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel

Hörsaalanleitung
Dr. E. Nana Chiadjeu

12. 06. 2013

Konvergenz der Reihen

Konvergenz der Reihen

1. Konvergenz der Reihen
2. Kreis
3. Ellipse
4. Hyperbel, Parabel

Konvergenz der Reihen

Konvergenz der Reihen

Konvergenz der Reihen

Aufgabe 2 Man prüfe, ob folgende Reihen konvergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\nu!}{\nu^{\nu}}$, (b) $\displaystyle\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{2^{\nu}}{(\ln(\nu))^{2\nu}}$.

Lösung 2a: Quotientenkriterium Man setze $a_{\nu} = (-1)^{\nu}\frac{\nu!}{\nu^{\nu}}$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}}\right| &= \left|(-1)^{\nu+1}\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}}\cdot\frac{\nu^{\nu}}{(-1)^{\nu}\nu!}\right| = \frac{|(-1)^{\nu+1}|}{|(-1)^{\nu}|}\,\frac{(\nu+1)\cdot\nu!\cdot\nu^{\nu}}{(\nu+1)^{\nu}\cdot(\nu+1)\cdot\nu!} \\
&= \frac{\nu^{\nu}}{\nu+1)^{\nu}} = \left(\frac{\nu}{(\nu+1)}\right)^{\nu} = \left(\frac{1}{\frac{(\nu+1)}{\nu}}\right)^{\nu} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu} = \frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}}\right| = \lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu}} = \frac{1}{e}
$$

Da $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}}\right| = \frac{1}{e} < 1$, konvergiert die Reihen absolut.

Konvergenz der Reihen

Aufgabe 2b $\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{2^{\nu}}{(\ln(\nu))^{2\nu}}$.

Lösung 2b: Wurzelnkriterium Man setze $a_\nu = (-1)^{\nu}\frac{2^{\nu}}{(\ln(\nu))^{2\nu}}$

$$\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \sqrt[n]{\left|(-1)^{\nu}\frac{2^{\nu}}{(\ln(\nu))^{2\nu}}\right|} = \sqrt[\nu]{|(-1)^{\nu}|}\cdot\sqrt[\nu]{\left(\frac{2}{(\ln(\nu))^{2}}\right)^{\nu}} = \frac{2}{(\ln(\nu))^{2}}.$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{2}{(\ln(\nu))^{2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Da $\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = 0 < 1$, konvergiert die Reihen absolut.

Kreis

Die Gleichung des Kreises um den Punkt $P = (\alpha, \beta)$ (Mittelpunkt) mit dem Radius R ist durch folgende Gleichung gegeben

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \,. \tag{1}$$

Parameterdarstellung eines Kreises:
Eine Parameterdarstellung des Kreises beschrieben durch (1) ist durch

$$\begin{cases} x = \alpha + R\cos(\theta) \\ y = \beta + R\sin(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

gegeben

Aufgabe

Man gebe die Gleichung sowie eine Parameterdarstellung des Kreises beschrieben durch

Ellipse

Sonderfall:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

ist die Gleichung der Ellipse um Nullpunkt mit den Extremalstellen $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$ und $D = (0, b)$

Im Allgemein, die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

beschreibt eine Ellipse des Mittelpunktes $P = (\alpha, \beta)$ mit den Extremalstellen $A = (-a + \alpha, \beta)$, $B = (a + \alpha, \beta)$, $C = (\alpha, -b + \beta)$ und $D = (\alpha, b + \beta)$

und eine Parameterdarstellung davon ist

$$\begin{cases} x = \alpha + a\cos(\theta) \\ y = \beta + b\sin(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

Aufgabe

Man gebe die Gleichung sowie eine Parameterdarstellung der Ellipse beschrieben durch $x^2 + 4y^2 + 6x - 16y + 21 = 0$.

Hyperbel, Parabel

Hyperbel

Sonderfall:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

ist die Gleichung der Hyperbel mit axis $y = \pm\frac{b}{a}x$

Parabel

Sonderfall:

Die Gleichungen

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{bzw.} \quad x = ay^2 + by + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \tag{7}$$

ist die Gleichung einer Parabel.