Prof. Dr. Hans-Georg Rück
Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL VERSITÄT

Analysis für Elektrotechniker/Informatiker Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure

Übungsblatt 02 29.04.2013

Aufgabe 1 Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$(i)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\,, \qquad (ii)\quad 2^n \le n!, \quad n \ge 4\,, \qquad (iii)\quad 7^n - 1, n \in \mathbb{N}, \text{ist durch 6 teilbar.}$$

Aufgabe 2 Man zeige für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, mit dem binomischen Satz:

$$(1+a)^n \geq 1 + \frac{n\,(n-1)}{2}\,a^2\,.$$

Für $n \geq 2$ zeige man:

$$(1+a)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4}\,a^2\,.$$

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei die Folge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, die rekursiv definiert ist durch $v_1 = 0, v_{n+1} = \frac{1}{2}(1+v_n^2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  (i) Zeigen Sie, dass die Folge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ durch 1 beschränkt ist.

  (ii) Untersuchen Sie die Folge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Monotonie.

  (iii) Zeigen Sie, dass $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(b) Was passiert mit den Teilen (i), (ii), (iii), wenn Sie in der Definition der Folge $v_1 = 2$ setzen?

Aufgabe 4
Man untersuche die Folge $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$(a)\quad u_n = \frac{\sin(n)}{n}, \qquad (b)\quad v_n = \frac{n+5}{\sqrt{n^2+2}+3n}\,.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert durch $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$.

  (i) Man zeige durch vollständige Induktion, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

    (α) streng monoton wachsend ist.

    (β) durch 2 beschränkt ist.

  (ii) Falls $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert, berechnen Sie den Grenzwert.

(b) Man untersuche die Folge $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls ihren Grenzwert.

$$(i)\quad v_n = \frac{5n}{2\sqrt[4]{3n^4+n}+7}, \qquad (ii)\quad w_n = \frac{-5n+(-1)^n}{2n+3}\,.$$

Abgabetermin: Bis Montag 06.05.2013 um 10:00 Uhr in der Abgabefächer vor dem Raum 2303, WA.
WICHTIG: Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen**, **Vornamen**, **Matrikelnummer**, **Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/SS13/Analysis/