Aufgabe 1
In der Vorlesung wurde das $m-te$ Taylorpolynom einer Funktion $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bei $x_0=(a_1,\cdots,a_n)$ definiert als

$$T_m(f,x,x_0)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}((x-x_0)gradf)^k(x_0)$$

mit

$$((x-x_0)gradf)^k(x_0)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x_0)(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})\ .$$

(a) Zeigen Sie durch Zusammenfassen der partiellen Ableitungen, dass für $n=2$ gilt

$$((x-x_0)gradf)^k(x_0)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x_1^j\partial x_2^{k-j}}(x_0)(x_1-a_1)^j(x_2-a_2)^{k-j}\ .$$

(b) Berechnen Sie $T_2(f,(x,y),(1,0))$ für $f(x,y)=e^{x^2+xy}$

(c) Angenommen Sie müsssten das Taylorpolynom $T_{10}(f,(x,y),(0,0))$ von $f(x,y)=\frac{2e^{y^3}}{2+3x^2}$ berechnen. Ginge das schneller, wenn Sie die geometrische Reihe sowie die Reihen der e-Funktion benutzen? Probieren Sie es aus.

Aufgabe 2
Sei $f(x,y,z)=-x^2+3y^2-2z$.

(a) Man berechne die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{e}}(x,y,z)\ .$$

wobei $\overrightarrow{e}$ der zu $(-1,0,1)$ gehörige Einheitsvektor ist.

(b) Im Punkt $(-2,3,1)$ bestimme man die Richtung des stärksten Anstiegs und des stärksten Gefälles der Funktion $f(x,y,z)$.

Aufgabe 3
Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$f(r,\varphi,\theta)=(r\cos(\varphi)\sin(\theta),r\sin(\varphi)\sin(\theta),r\cos(\theta))\ ,$$

Man berechne die Jacobi-Matrix von $f(r,\varphi,\theta)$.

Aufgabe 4
Gegeben sei die Funktion $f(x,y)$ definiert durch

$$f(x,y)=(x+y)e^{x^2-y^2}\qquad \text{und der Punkt}\qquad P=(0,1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(a) Man entwickle die Funktion

$$f(x, y) = \frac{y}{x}$$

in eine Taylorreihe um den Punkt $(2, 1)$ und untersuche das Konvergenzgebiet.

(b) Gegeben sei die Funktion definiert durch

$$f(x, y) = (x + 2y) \ln(x^2 + y^2) \qquad \text{und der Punkt} \qquad P = (0, 1).$$

Man berechne die Tangentialebene im Punkt P.

(c) Es sei

$$f(x, y, z) = x^3 + xy^2 + xyz + z^2$$

Man berechne $T_3(f, (x, y, z), (1, 1, 1))$.

Abgabetermin: Bis Montag 08.07.2013 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.
WICHTIG: Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Geben Sie auf jedem Blatt Ihren **Namen**, **Vornamen**, **Matrikelnummer**, **Studiengang** sowie Ihre **Gruppennummer** an.