Prof. Dr. Hans-Georg Rück
Dr. E. Nana Chiadjeu

Analysis für

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 13 **Elektrotechniker/Informatiker Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure** **15.07.2013**

Aufgabe 1
Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y) = 4x - 3xy$$

unter der folgenden Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{5}{18} = 0$$

infrage?

Aufgabe 2
Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2y^2 + 666z^4$$

unter den beiden folgenden Nebenbedingungen

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - 4 = 0$$

infrage?

Aufgabe 3
Man berechne das Integral

$$\int_{-1}^{2} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{3} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 \right) dx_2 \right) dx_3 \,.$$

Aufgabe 4
Man berechne das Integral

$$\int_{0}^{2} \left(\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{3} \frac{x^2 + e^y}{1 + z}\, dx \right) dy \right) dz \,.$$

Aufgabe 5
Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge berechne man das Integral

$$\int_{0}^{a} \left(\int_{x}^{a} e^{-y^2} dy \right) dx \,.$$

Aufgabe 6
Man berechne das Integral $\int_D (x + y)\, d(x, y)$.

(a) D sei das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

(b) $D = \{(x,y)\,|\,2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\,,\, y > 0\}$. (Hinweis: Polarkoordinaten).

Aufgabe 7
Die Gleichung einer Ellipse um den Nullpunkt ist gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$$

und die Parametrisierung mit elliptischen Koordinaten erfolgt durch die Funktion $f : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(r,\theta) = (a\,r\cos(\theta), b\,r\sin(\theta))\ .$$

Man berechne den Flächeninhalt des von der Ellipse umschlossenen Gebiets.

Aufgabe 8
Man berechne das Volumen des folgenden Teilgebiets $D \subset \mathbb{R}^3$

$$D := \left\{(x,y,z)\,\middle|\, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{x-1}{2}, \sin(y) \leq z \leq y(y+1)\right\}$$

Aufgabe 9
Die Gleichung eines Ellipsoids um den Nullpunkt ist gegeben durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, (a, b, c > 0)$$

und die Parametrisierung mit Ellipsoidkoordinaten erfolgt durch die Funktion $f : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$,

$$f(r,\varphi,\theta) = (a\,r\cos(\varphi)\cos(\theta), b\,r\sin(\varphi)\cos(\theta), c\,r\sin(\theta))\ ,$$

(a) Man berechne die Determinante der Jacobi-Matrix von f.

(b) Gegeben sei das Innere des Ellipsoids

$$D := \left\{(x,y,z)\,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}\ .$$

Man bestimme das Integral

$$\int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz\ .$$