Umkehrfunktion, Berechnung der Grenzwerte

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL VERSITÄT

07. 05. 2014

Umkehrfunktion

Umkehrfunktion

Umkehrfunktion

Aufgabe 1

Man berechne die Inverse der folgende Funktionen

(a)

$$f(x) = -7x + 5$$

(b)

$$h(x) = \frac{x-1}{2x+3}$$

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} f(x) = -7x + 5 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = -7x + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad 7x = -y + 5 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-y+5}{7} \\ &\Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{7} \end{aligned}$$

Umkherfunktion

(b)

$$
\begin{aligned}
h(x) = \frac{x-1}{2x+3} \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{x-1}{2x+3} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(2x+3) = x-1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2yx + 3y = x - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2yx - x = -3y - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x(2y-1) = -3y - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-3y-1}{2y-1}, \quad y \neq \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{-3x-1}{2x-1} \quad x \neq \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
$$

Umkherfunktion

Aufgabe 2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = (x-3)(x-4)\ .$$

Man suche die größtmöglichen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung von f auf D umkehrbar wird, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.
(größtmöglichen Teilmengen $D \subset \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung von f auf D umkehrbar wird)

$$\begin{aligned} h(x) = (x-3)(x-4) &= (x-3)(x-4) \\ &= x^2 - 7x + 12 \\ &= (x-\frac{7}{2})^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12 \\ &= (x-\frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$D_1 = (-\infty, \frac{7}{2}] \quad D_2 = [\frac{7}{2}, \infty)$$

Auf D_1 bzw. D_2 ist die Funktion umkehrbar.

Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 2 Aus des obigen Teil haben wir

$$
\begin{aligned}
h(x) = (x-\frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4} \quad &\Longleftrightarrow \quad y = (x-\frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-\frac{7}{2})^2 = y + \frac{1}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-\frac{7}{2}) = \pm\sqrt{y+\frac{1}{4}}, \quad y \geq -\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow \quad x = \sqrt{y+\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{y+\frac{1}{4}} + \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow f_a^{-1}(x) = \sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \quad h_b^{-1}(x) = -\sqrt{x+\frac{1}{4}} + \frac{7}{2} \ .
$$

$$
D_1 = (-\infty, \frac{7}{2}] \quad D_2 = [\frac{7}{2}, \infty)
$$

$$
f^{-1}(x) = \sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{7}{2} \quad \text{für} \quad D_2 \quad \text{und} \quad f^{-1}(x) = -\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{7}{2} \quad \text{für} \quad D_1 \ .
$$

Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 3 Man berechne

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$