Verkettung-Ableitungen, Hyperbelfunktionen

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL
VERSITÄT

14. 05. 2014

Verkettung-Ableitungen

Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \sqrt{2x+3}\,, \quad g(x) = x^2 + 2x$$

(a) Man berechne die Verkettungen $f \circ g$ sowie $g \circ f$.

(b) Man berechne die Ableitung $(g \circ f)'(x)$ sowohl mit direktem Weg als auch mit der Kettenregel.

Lösung: (a Teil 1)

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= f[x^2 + 2x] \\ &= \sqrt{2(x^2+2x)+3} \\ &= \sqrt{2x^2+4x+3} \end{aligned}$$

Verkettung-Ableitungen

Lösung: (a Teil 2)

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= g[\sqrt{2x+3}] \\ &= \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 + 2\sqrt{2x+3} \\ &= 2x+3+2\sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

b) Teil 1: Berechnung von $(g \circ f)'(x)$: mit dem direktem Weg

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= \left(2x+3+2\sqrt{2x+3}\right)' \qquad (\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}} \\ &= 2+2\frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} \\ &= 2+\frac{2}{\sqrt{2x+3}} \\ &= 2+\frac{2\sqrt{2x+3}}{2x+3} \end{aligned}$$

Verkettung-Ableitungen

b) Teil 2 Berechnung von $(g \circ f)'(x)$: mit der Kettenregel

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= f'(x) \cdot g'[f(x)] \\
&= (\sqrt{2x+3})' \cdot g'[\sqrt{2x+3}] \quad \text{mit} \quad g'(x) = 2x+2 \\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} \cdot (2(\sqrt{2x+3})+2) \\
&= 2 + \frac{2}{\sqrt{2x+3}} \\
&= 2 + \frac{2\sqrt{2x+3}}{2x+3}
\end{aligned}
$$

Hyperbelfunktionen

Aufgabe 2

Die Hyperbelfunktionen Sinushyperbolicus und Cosinushyperbolicus sind erklärt durch:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Man zeige, dass

(a) $(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1$

(b) $\sinh'(x) = \cosh(x) \quad \text{und} \quad \cosh'(x) = \sinh(x)\,.$

(c) die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$, genannt *arcsinh*(x) ist
$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Hyperbelfunktionen

Lösung: (a):

$$
\begin{aligned}
(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1\,.
\end{aligned}
$$

Lösung: (b):

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\,.$$

$$\cosh'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)\,.$$

Hyperbelfunktionen

Lösung: (c): Umkehrfunktion von $\sinh(x)$

$$
\begin{aligned}
y = \sinh(x) \quad & \Longleftrightarrow \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
& \Longleftrightarrow \quad 2y = e^x - e^{-x} \qquad /.e^x \\
& \Longleftrightarrow \quad 2ye^x = e^{2x} - 1 \\
& \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (e^x - y)^2 - (y)^2 - 1 = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \qquad \sqrt{.} \\
& \Longleftrightarrow \quad e^x - y = \pm\sqrt{y^2 + 1} \\
& \Longleftrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{oder} \quad e^x = y - \sqrt{y^2 + 1} \\
& \Longrightarrow \quad e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{da} \quad e^x > 0 \\
& \Longrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \\
& \Longrightarrow \quad f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \,.
\end{aligned}
$$