Höhenlinien: Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL
VERSITÄT

18. 06. 2014

Grenzwert

Grenzwert

1. Kreis
2. Ellipse
3. Hyperbel, Parabel
4. Höhenlinien

Grenzwert

1. Kreis
2. Ellipse
3. Hyperbel, Parabel
4. Höhenlinien

Grenzwert

Kreis

Die Gleichung des Kreises um den Punkt $P = (\alpha, \beta)$ (Mittelpunkt) mit dem Radius R ist durch folgende Gleichung gegeben

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \ . \tag{1}$$

Parameterdarstellung eines Kreises:
Eine Parameterdarstellung des Kreises beschrieben durch (1) ist durch

$$\begin{cases} x = \alpha + R\cos(\theta) \\ y = \beta + R\sin(\theta) \end{cases} \tag{2}$$

gegeben

Aufgabe

Man gebe die Gleichung sowie eine Parameterdarstellung des Kreises beschrieben durch

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 11 = 0 \ .$$

Ellipse

Sonderfall:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{3}$$

ist die Gleichung der Ellipse um Nullpunkt mit den Extremalstellen $A=(-a,0)$, $B=(a,0)$, $C=(0,-b)$ und $D=(0,b)$

Im Allgemein, die Gleichung

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \tag{4}$$

beschreibt eine Ellipse des Mittelpunktes $P=(\alpha,\beta)$ mit den Extremalstellen $A=(-a+\alpha,\beta)$, $B=(a+\alpha,\beta)$, $C=(\alpha,-b+\beta)$ und $D=(\alpha,b+\beta)$

und eine Parameterdarstellung davon ist

$$\begin{cases} x=\alpha+a\cos(\theta) \\ y=\beta+b\sin(\theta) \end{cases} \tag{5}$$

Aufgabe

Man gebe die Gleichung sowie eine Parameterdarstellung der Ellipse beschrieben durch $x^2+4y^2+6x-16y+21=0$.

Hyperbel, Parabel

Hyperbel

Sonderfall:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

ist die Gleichung der Hyperbel mit axis $y = \pm\frac{b}{a}x$

Parabel

Sonderfall:

Die Gleichungen

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{bzw.} \quad x = ay^2 + by + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0 \tag{7}$$

ist die Gleichung einer Parabel.

Höhenlinien

Aufgabe 1a Man gebe die Höhenlinien der folgenden Funktionen an

$$g(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2 \,.$$

Lösung: Die Höhenlinien der Funktion $g(x_1, x_2)$ sind die Lösungen der Gleichung $g(x_1, x_2) = c$.

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) = c \quad &\Longleftrightarrow \quad 3x_1^2 + 4x_2^2 + 2 = c \\ &\Longleftrightarrow \quad 3x_1^2 + 4x_2^2 = c - 2 \end{aligned}$$

(a) $c - 2 < 0$
Die Höhenlinien ist die Leere Menge.

(b) $c - 2 = 0$ d.h $c = 2$

$$3x_1^2 + 4x_2^2 = c - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 3x_1^2 + 4x_2^2 = 0$$

Die Höhenlinien ist der Punkt $P = (0, 0)$.

Höhenlinien

Aufgabe 1a

(c) $c-2>0$

$$3x_1^2+4x_2^2=c-2 \iff \frac{3}{c-2}x_1^2+\frac{4}{c-2}x_2^2=1$$
$$\iff \frac{x_1^2}{\frac{c-2}{3}}+\frac{x_2^2}{\frac{c-2}{4}}=1$$
$$\iff \frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c-2}{3}}\right)^2}+\frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{c-2}}{2}\right)^2}=1$$

Die Höhenlinien der Funktion g sind die Ellipse der Mittelpunkt $M=(0,0)$, und der Extremstellen $A=(-\sqrt{\frac{c-2}{3}},0)$, $B=(\sqrt{\frac{c-2}{3}},0)$, $C=(0,-\frac{\sqrt{c-2}}{2})$ und $D=(0,\frac{\sqrt{c-2}}{2})$.

Höhenlinien

Aufgabe 1b Man gebe die Höhenlinien der folgenden Funktionen an

$$h(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 + 2\,.$$

Lösung: Die Höhenlinien der Funktion $g(x_1, x_2)$ sind die Lösungen der Gleichung $h(x_1, x_2) = c$.

$$g(x_1, x_2) = c \iff 3x_1^2 - 4x_2^2 = c - 2$$

(a) $c - 2 < 0$ Die Höhenlinien von h sind die Hyperbeln der Gleichung

$$-\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{-c+2}{3}}\right)^2} + \frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{-c+2}}{2}\right)^2} = 1$$

(b) $c - 2 > 0$ Die Höhenlinien von h sind die Hyperbeln der Gleichung

$$\frac{x_1^2}{\left(\sqrt{\frac{c-2}{3}}\right)^2} - \frac{x_2^2}{\left(\frac{\sqrt{c-2}}{2}\right)^2} = 1$$

Höhenlinien

Aufgabe 1b

(c) $c - 2 = 0$ d.h. $c = 2$, Die Höhenlinien sind die Geraden der Gleichung $x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$.