Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Peter Dräxler

Sommersemester 2014
Blatt 08
11.06.2014

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Eine Münze wird dreimal geworfen. Wir betrachten den Ereignisraum $\Omega := \{K, Z\}^3$ mit der Gleichverteilung P. Sei A das Ereignis, dass mindestens zweimal Kopf kommt. Sei B das Ereignis, dass beim ersten Wurf Kopf kommt. Sei $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_2 = x_3\}$ das Ereignis, dass beim zweiten und dritten Wurf die gleiche Seite der Münze oben liegt.

a) Berechnen Sie $P(A \cap B \cap C)$ und $P(A)P(B)P(C)$.

b) Ist die Familie (A, B, C) von Ereignissen unabhängig?

Aufgabe 2. Auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$ und $P(5) = P(6) = \frac{1}{4}$. (Man kann sich dabei das Würfeln mit einem *unfairen* Würfel vorstellen.) Sei $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{5, 6\}$, C=$\{3, 4, 5\}$.
Untersuchen Sie die folgenden Familien auf Unabhängigkeit: (A, B), (A, C), (B, C) und (A, B, C).

Aufgabe 3. Auf einer Ausstellung befinden sich 12 Gemälde. Zwei davon sind Fälschungen, 10 sind Originale. Ein Kunde taucht zusammen mit einem Experten auf, der bei Vorlage eines Gemäldes eine Einschätzung abgeben kann, ob es eine Fälschung ist oder nicht. Dieser Experte beurteilt ein ihm vorgelegtes Gemälde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ richtig (unabhängig davon, ob man ihm ein Original oder eine Fälschung vorlegt).
Der Kunde wählt zufällig ein Bild und befragt den Experten. Hält der Experte es für ein Original, so wird es von dem Kunden gekauft. Sonst wählt der Kunde zufällig ein anderes Bild und kauft dieses, ohne den Experten noch einmal zu befragen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kunde mit einem Original nach Hause geht.

Aufgabe 4. n Studierende torkeln nach einem Fest in die Betten ihres großen Schlafsaals. Obwohl jedem Studierenden bereits ein Bett zugewiesen wurde, legt sich jeder völlig willkürlich in irgendein Bett. Wir denken uns die Studierenden und die Betten nummeriert, so dass wir die Situation als Wahrscheinlichkeitsraum mit der Menge $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}^{n,\neq}$ als Ereignisraum und der Gleichverteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß beschreiben können.
Für $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ und $\omega \in \Omega$ definieren wir durch $X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Zufallsvariable X_i, die misst, ob der i-te Studierende im richtigen Bett liegt. Somit ist $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Anzahl der Studierenden, die im richtigen Bett liegen.
Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens bis Mittwoch, den 18.06.2014, um 08:15 Uhr in den Kasten vor Raum 2303 eingeworfen werden.