UNIVERSITÄT KASSEL
FACHBEREICH 10/16
Peter Dräxler

Sommersemester 2014
Blatt 12
09.07.2014

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Dies ist ein zusätzliches Blatt, das möglicherweise nicht mehr vollständig besprochen wird. Es können aber noch zusätzliche Bonuspunkte erzielt werden, wobei nur die Aufgaben 1) und 2) relevant für den Scheinerwerb sind.

Aufgabe 1. Wir betrachten die durch

$$x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3} \qquad x_0 = 1, x_1 = 6, x_2 = 28$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geq 0}$. Finden Sie eine rekursionsfreie Darstellung von $(x_n)_{n\geq 0}$.

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbf{N}$ sei w_n die Anzahl der Tupel in $\{0,1,2\}^n$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten.

a) Finden und beweisen Sie eine Rekursionsformel für die Folge $(w_n)_{n\geq 1}$.

b) Finden Sie eine rekursionsfreie Darstellung der Folge $(w_n)_{n\geq 1}$.

Aufgabe 3. Ein Versuch mit Ereignisraum $\{0,1\}$ (1 bedeutet Treffer und 0 Niete) und Trefferwahrscheinlichkeit p mit $0 \leq p \leq 1$ wird n-mal unabängig wiederholt, wobei $n \in \mathbf{N}$. Ereignisraum des gesamten Experiments ist also $\Omega = \{0,1\}^n$. Sei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfes und $M := \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ der Mittelwert dieser Zufallsvariablen. Ferner sei $\varepsilon > 0$.

a) Welche Abschätzung liefert die Ungleichung von Chebyshev für $P(|M-p| \geq \varepsilon)$?

b) Beweisen Sie, dass $P(|M-p| \geq \varepsilon)) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$ gilt.
(Hinweis: Lösen Sie zunächst Teilaufgabe a). Was ist das Maximum der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto x(1-x)$?)

c) Sei nun $n = 100$ und $p = 0,5$. Welche Abschätzung für $P(|M-p| \geq \varepsilon)$ erhält man für $\varepsilon = 0,5$, $\varepsilon = 0,1$ und $\varepsilon = 0,001$?

d) Berechnen Sie im Fall $n = 100$, $p = 0,5$, $\varepsilon = 0,1$ den exakten Wert von $P(|M-p| \geq \varepsilon)$.

Aufgabe 4. Entwickeln Sie $\frac{1}{(X-1)(X-2)}$ in eine Potenzreihe. (Hinweis: Denken Sie an die geometrische Reihe!)

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens bis Mittwoch, den 16.07.2014, um 08:15 Uhr in den Kasten vor Raum 2303 eingeworfen werden.