Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 2

Bearbeitung bis 27.04.2016, 8:00

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Frau Müller kündigt an: „Für heute Abend habe ich Familie Meier zu uns eingeladen.“ Herr Müller fragt bestürzt: „Kommt etwa die ganze Familie, also Herr und Frau Meier mit ihren Söhnen Andreas, Bernd und Christian?“ Frau Müller möchte ihren Mann zum logischen Denken anreizen und antwortet: „Wenn Herr Meier kommt, dann bringt er auch seine Frau mit. Es kommt mindestens einer der Söhne Bernd und Christian. Entweder kommt Frau Meier oder Andreas. Andreas und Christian kommen entweder beide oder aber beide nicht. Und wenn Bernd kommt, dann kommen auch Christian und Herr Meier. – Alles klar?“
Wer genau kommt abends zu Besuch?
Begründen Sie Ihre Antwort formal sauber, d. h.

(i) Formalisieren Sie alle Aussagen zum Erscheinen einzelner Personen (d.h. „Herr Meier kommt“ wird zu Aussage H usw.).

(ii) Übersetzen Sie alle von Frau Müller gemachten verbalen Aussagen in Ausdrücke der Aussagenlogik unter Verwendung der in (i) formalisierten Aussagen.

(iii) Zeigen Sie mithilfe einer Wertetabelle oder mithilfe logischer Umformungen, dass Ihre Lösung korrekt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien A, B, C Aussagen. Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, dass die beiden Aussagen $A \wedge (\neg(B \wedge C))$ und $(A \wedge (\neg B)) \vee (A \wedge (\neg C))$ äquivalent sind.

b) Bilden Sie die Negation der Aussage

$$\forall e \in \mathbb{N},\ e \leq 3\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ n \geq k \Rightarrow f(n) \leq n^e$$

c) Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie, dass $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
Zeigen Sie, dass $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$ im Allgemeinen nicht gilt.
(Die Definition von $\triangle$ finden Sie in Aufgabe 6.)

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Gegeben seien die Teilmengen $A := \{-1, 1, 8, \sqrt{7}, 2, 3\}$, $B := \{1, 2, 4, \sqrt{7}, 0\}$, $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{7}\}$ und $D := \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\sqrt{7}\}$ von $\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$ und $A \cap B \cap C$.

b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:
$A \subseteq B$, $B \subseteq A$, $A \subseteq D$, $D \subseteq A$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Eine KFZ-Versicherung hat ihre Kunden in folgende Mengen eingeteilt:
K ist die Menge aller Kunden. U ist die Menge der Kunden, die schon einen Unfall verursacht haben. G ist die Menge der Kunden, die schon einen Strafzettel wegen überhöhter Geschwindigkeit bekommen haben. A ist die Menge der Kunden, die schon wegen Alkohol am Steuer verurteilt worden sind.
Beschreiben Sie die nachfolgenden Mengen durch Bildung von Durchschnitt, Vereinigung und Komplement aus den Mengen K, U, G, A:

a) Die Menge der Kunden, die schon einen Strafzettel wegen überhöhter Geschwindigkeit bekommen haben und schon wegen Alkohol am Steuer verurteilt worden sind.

b) Die Menge der Kunden, die weder schon einen Unfall verursacht haben, noch wegen Alkohol am Steuer verurteilt worden sind.

c) Die Menge der Kunden, die noch wegen keines Vergehens aktenkundig sind.

d) Die Menge der Kunden, die noch keinen Unfall verursacht haben, aber schon wegen Alkohol am Steuer verurteilt worden sind.

Aufgabe 5
Geben Sie die folgenden Mengen explizit durch Auflisten ihrer Elemente an:

a) $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$

b) $\mathcal{P}(\emptyset)$

c) $\mathcal{P}(\{1\})$

d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$

Beweisen oder widerlegen Sie: Zwei Mengen sind genau dann identisch, wenn ihre Potenzmengen identisch sind.

Aufgabe 6
Für zwei Mengen A und B bezeichnet

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die sogenannt symmetrische Differenz von A und B.

- Finden Sie die korrekte logische Bedingung $L(x)$, so dass Sie $A \triangle B = \{x \in A \cup B \mid L(x)\}$.
- Stellen Sie $A \triangle B$ mit Hilfe der Mengenoperationen $\cap, \cup, \setminus$ so dar, dass Sie dabei nur eine $\setminus$ Operation benötigen.
- Zeigen Sie, dass die symmetrische Differenz $\triangle$ kommutativ ist (d.h. $A \triangle B = B \triangle A$).
  Zeigen Sie, dass die (normale) Differenz $\setminus$ im Allgemeinen nicht kommutativ ist.