Prof. Dr. Werner Seiler
Dominik Wulf

Analysis für

UNIKASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 10 **Elektrotechniker/Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure** **26.06.2017**

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 3y^2 + z$.

(a) Zeigen Sie anhand der $\varepsilon - \delta$-Definition, dass die Funktion f im Punkt $(0, 0, 0)$ stetig ist.

(b) Ist f total differenzierbar?

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{p} = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ in Richtung des Vektors $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils den Gradienten der folgenden Funktionen für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, wo diese definiert sind.

$$(i)\quad f(x, y) = x^2 + y\ln(y) - xye^x, \qquad (ii)\quad g(x, y) = \mathrm{e}^{2x^2+2y^2}, \qquad (iii)\quad h(x, y) = y\ln\left(1 + \frac{x^2}{1 + y^2}\right)$$

Aufgabe 3

Die Transformation der Kugelkoordinaten (r, φ, θ) in das kartesische Koordinatensystem (x, y, z) sei gegeben durch die folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (r, \varphi, \theta) \mapsto (r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta)) = (x, y, z).$$

(a) Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ injektiv oder surjektiv (oder bijektiv)? Ändert sich dies, wenn man stattdessen die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}_{>0} \times [0, 2\pi) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},\ (r, \varphi, \theta) \mapsto f(r, \varphi, \theta)$ betrachtet?

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f(r, \varphi, \theta)$.

(c) Es sei eine weitere Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (t, u, v) \mapsto (e^t, u^2, v^2)$ gegeben.
Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $(f \circ g)(t, u, v)$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x\,\mathrm{e}^y$.

  (i) Zeigen Sie anhand der $\varepsilon - \delta$-Definition, dass die Funktion f im Punkt $(0, 0)$ stetig ist.
  Hinweis: Benutzen Sie, dass e^y streng monoton wachsend ist und z.B. $\mathrm{e}^y < \mathrm{e}$ für $|y| < 1$ gilt.

  (ii) Ist f total differenzierbar?

  (iii) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{p} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung des Vektors $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

(b) Gegeben seien die Funktionen

$$f : (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}),\ (r, t) \mapsto (r^2 t, r\,\mathrm{e}^t) \quad \text{und} \quad g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}^2,\ (s, u) \mapsto \left(\frac{s}{u}, -su\right).$$

  (i) Ist $g \circ f : (\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ injektiv oder surjektiv (oder bijektiv)?

  (ii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von $f(r, t)$, $g(s, u)$ und $(g \circ f)(r, t)$.

Abgabetermin: Dienstag, 04.07.2017 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.

WICHTIG: Aufgabe 4 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese zusammen mit dem folgenden Deckblatt. Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html.

Hausaufgabe 10

Nachname:

Vorname:

Studiengang:

Matr.-Nr.:

Gruppe:

Punkte: