Analysis für Ingenieure

Prof. Dr. Wolfram Koepf

Universität Kassel
http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf

SS 2011

Überblick

- 0. Einleitung
- 1. Umgang mit Mengen
- 2. Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion
- 9. Irrationale Zahlen
- 11. Ungleichungen
- 12. Funktionen

Mathematik als deduktive Wissenschaft

Die Grundausrüstung

- Axiome sind Aussagen, die als gegeben hingenommen werden. „Es gibt natürliche Zahlen."
- Definitionen kann man mit DIN-Normen vergleichen: Hiermit wird die Fachsprache festgelegt, für ein Wort wird genau gesagt, welche Eigenschaften oder Objekte mit diesem Wort verbunden werden sollen. „Eine gerade Zahl ist eine ganze Zahl, die durch 2 teilbar ist."
- Betrachtet werden Aussagen und Zusammenhänge, die mit den Gesetzen der Logik bewiesen oder widerlegt werden können. Formulierung meist als „Satz" oder „Lemma" mit anschließendem Beweis, oder als „Folgerung".

Warum man es mit Kreativität in der Mathematik weit bringen kann

Der Trick des jungen Gauß

Wie löst Gauß als neunjähriger Schüler die „Fleißaufgabe“

$$1 + 2 + \cdots + 100 = ?$$

Hier sein Weg:

$$\begin{aligned} 1 + 100 &= 101 \\ 2 + 99 &= 101 \\ \vdots &= \vdots \\ 50 + 51 &= 101\ , \end{aligned}$$

also $\quad 1 + 2 + \cdots + 100 = 50 \cdot 101 = 5.050\ .$

Warum man es mit Kreativität in der Mathematik weit bringen kann

Geht dies auch bei ungeraden Zahlen?

Bei der ähnlichen Aufgabe

$$1 + 2 + \cdots + 99 = ?$$

könnte man so vorgehen:

$$\begin{aligned} 0 + 99 &= 99 \\ 1 + 98 &= 99 \\ \vdots &= \vdots \\ 49 + 50 &= 99 \,, \end{aligned}$$

also $$1 + 2 + \cdots + 99 = 50 \cdot 99 = 4.950 \,.$$

Warum Abstraktion wichtig ist

Herleitung einer Formel für gerades n

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige gerade Zahl. Was ist dann

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

Hier der Weg:

$$\begin{aligned} 1 + n &= n + 1 \\ 2 + (n-1) &= n + 1 \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right) &= n + 1\,, \end{aligned}$$

also $\quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}\,(n+1)\,.$

Warum Abstraktion wichtig ist

Herleitung einer Formel für ungerades n

- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebige ungerade Zahl. Was ist dann

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

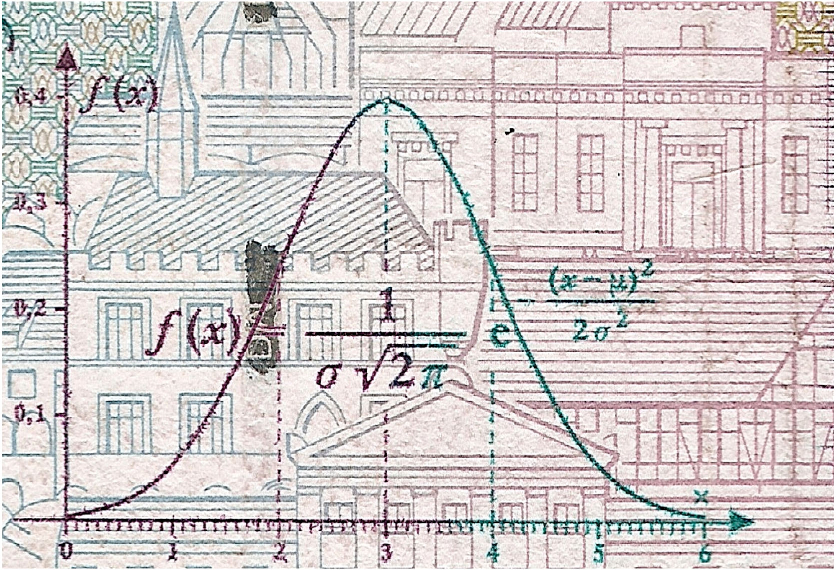
Hier der Weg:

$$\begin{aligned} 0 + n &= n \\ 1 + (n-1) &= n \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} &= n\,, \end{aligned}$$

also $\quad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}\, n\,.$

- Für gerade und ungerade Zahlen gilt also dieselbe Formel!


GU9183988K7
DEUTSCHE BUNDESBANK
Banknote
10
ZEHN DEUTSCHE MARK
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
Deutsche Bundesbank
Frankfurt am Main
1. September 1999
GU9183988K7


f(x)
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1
2
3
4
5
6
x
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Umgang mit Mengen

Was ist eine Menge?

- **Definition 1.1**:
  Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohl unterschiedener Objekte. Für jedes Objekt muss feststehen, ob es zur Menge gehört oder nicht.
  Ein Objekt x, das zu einer Menge M gehört, heißt Element von M.
- **Bezeichungsweise**:
  $x \in M$, falls x ein Element von M ist, andernfalls $x \notin M$.

Umgang mit Mengen

Darstellung von Mengen

- aufzählend:

$$G = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- verbal:
  - G: Menge aller positiven geraden Zahlen
  - $\mathbb{N}$: Menge aller natürlichen Zahlen
  - $\mathbb{Z}$: Menge aller ganzen Zahlen
  - S: Menge aller Studierenden im Hörsaal 1603
- beschreibend:

$$G = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2m \text{ mit } m \in \mathbb{N}\}$$

Umgang mit Mengen

Weitere Zahlmengen

- natürliche Zahlen mit 0:

$$\mathbb{N}_{\geqq 0} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geqq 0\}$$

- rationale Zahlen:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

- reelle Zahlen:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist Dezimalzahl}\}$$

- komplexe Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{x + i\,y \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Umgang mit Mengen

Mengenoperationen

Mit beliebigen Mengen kann man folgende Operationen durchführen und durch Venndiagramme visualisieren.

- Vereinigung:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

- Durchschnitt:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

- Differenz:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Umgang mit Mengen

Mengenoperationen

- Wir nennen zwei Mengen disjunkt, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben:
$$A \cap B = \emptyset = \{\}$$
- Teilmenge:
$$A \subseteq B \text{ genau dann, wenn } (x \in A \Rightarrow x \in B)$$
Insbesondere: $A \subseteq A$
- Gleichheit:
$$A = B \text{ genau dann, wenn } A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A$$
- Echte Teilmenge:
$$A \subsetneq B \text{ genau dann, wenn } (A \subseteq B \text{ und } A \neq B)$$

Axiome der natürlichen Zahlen

Peano-Axiome

Es gibt eine Menge $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

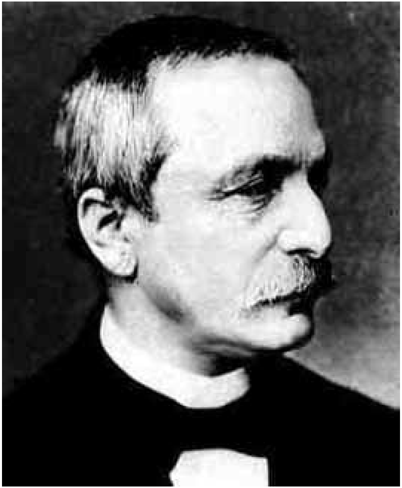
Axiom 1 (Axiom vom Nachfolger) Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt genau einen Nachfolger $n+1$ in $\mathbb{N}$. Nachfolger verschiedener Elemente sind verschieden.

Axiom 2 (Axiom vom Zählbeginn) Genau ein Element $1 \in \mathbb{N}$ ist nicht Nachfolger eines anderen Elements.

Axiom 3 (Induktionsaxiom) Eine Menge $M \subseteq N$ natürlicher Zahlen, welche 1 und mit n auch stets $n+1$ enthält, ist bereits ganz $\mathbb{N}$.
Kurz:

$$1 \in M \text{ und } (n \in M \Rightarrow n+1 \in M) \Longrightarrow M = \mathbb{N}$$

Giuseppe Peano, 27. 08. 1858–20. 04. 1932



Leopold Kronecker: 07. 12. 1823–29. 12. 1891

Die ganze Zahl schuf der liebe Gott, alles Übrige ist Menschenwerk.

Beweise mit vollständiger Induktion

Prinzip der vollständigen Induktion

Das Induktionsaxiom erlaubt es, Beweise für Aussagen $A(n)$ zu führen, die für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gelten, und dies geht so:

- (Induktionsanfang) Man beweise die Aussage $A(1)$.
- (Induktionsschritt) Unter der Voraussetzung, dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (Induktionsvoraussetzung) zeige man, dass die Aussage $A(n+1)$ gilt.
  Kurz: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann ist aufgrund des Induktionsaxioms die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen, für welche $A(n)$ gültig ist, gleich ganz $\mathbb{N}$.

Beweise mit vollständiger Induktion

Beispiel (Prinzip der vollständigen Induktion)

Als Beispiel beweisen wir die generalisierte Summengleichung des jungen Gauß

$$A(n): \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

- (Induktionsanfang) Offenbar ist

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}\,.$$

  Also ist die Aussage $A(1)$ korrekt.

Beweise mit vollständiger Induktion

Beispiel (Prinzip der vollständigen Induktion)

- (Induktionsschritt) Gelte also die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann können wir folgern

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

  Kurz: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also ist aufgrund des Induktionsaxioms die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen, für welche $A(n)$ gültig ist, gleich ganz $\mathbb{N}$, und die Aussage $A(n)$ ist somit für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Beweise mit vollständiger Induktion

Beispiel (Geometrische Folge)

Als weiteres Beispiel beweisen wir die geometrische Summenformel für $n \geqq 0$:

$$A(n): \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,,$$

die man ähnlich wie die letzte Summe herleiten kann.

- (Induktionsanfang) Offenbar ist

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = 1 = \frac{q-1}{q-1}\,.$$

  Also ist die Aussage $A(0)$ korrekt.

Beweise mit vollständiger Induktion

Beispiel (Geometrische Folge)

- (Induktionsschritt) Gelte also die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Dann können wir folgern

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \overset{(IV)}{=} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$
$$= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,.$$

Kurz: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Also ist aufgrund des Induktionsaxioms die Menge M derjenigen natürlichen Zahlen, für welche $A(n)$ gültig ist, gleich $\mathbb{N}_{\geq 0}$, und die Aussage $A(n)$ ist somit für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ bewiesen.

Brüche

Die rationalen Zahlen

- Nimmt man zu den Brüchen die negativen Brüche hinzu, so erhalten wir die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
- Wir halten einige Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ axiomatisch fest.
- **Satz 8.9** (Rationale Zahlen): Es gibt eine Menge $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$ mit zwei Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation), d. h. zu je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{Q}$ gibt es genau ein Element $x + y \in \mathbb{Q}$ und genau ein Element $x \cdot y \in \mathbb{Q}$.
- Für diese Operationen gelten die folgenden Gesetze der Addition (A1)–(A4), Gesetze der Multiplikation (M1)–(M4) sowie das Distributivgesetz (D), welches die beiden Operationen miteinander verbindet.
- Schließlich gelten die Ordnungsaxiome (O1)–(O3) sowie das Archimedische Axiom (AA).

Brüche

Die rationalen Zahlen

Gesetze der Addition: Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

- (A1) (Assoziativgesetz)
$$(x + y) + z = x + (y + z)$$
- (A2) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein Element $0 \in \mathbb{Q}$ mit
$$0 + x = x + 0 = x$$
- (A3) (Existenz inverser Elemente) Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{Q}$ mit
$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$
- (A4) (Kommutativgesetz)
$$x + y = y + x$$

Brüche

Die rationalen Zahlen

Gesetze der Multiplikation: Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

- (M1) (Assoziativgesetz)
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$
- (M2) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{Q}, 1 \neq 0$ mit
$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$
- (M3) (Existenz inverser Elemente) Für jedes $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ gibt es ein Element $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ mit
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$$
- (M4) (Kommutativgesetz)
$$x \cdot y = y \cdot x$$

Brüche

Die rationalen Zahlen

Verträglichkeit von $+$ und $\cdot$: Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

- (D) (Distributivgesetz)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- Die Gesetze (A1)–(D) heißen Körperaxiome. Jede Menge $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, die diese 9 Regeln erfüllt, nennt man einen Körper (engl.: field).

Ordnungsaxiome: In $\mathbb{Q}$ gibt es eine Relation $>$, die je zwei Elemente miteinander vergleicht. Seien $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

- (O1) (Trichotomiegesetz) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt genau eine der drei folgenden Aussagen:

$$x > 0 \qquad \text{oder} \qquad x = 0 \qquad \text{oder} \qquad -x > 0$$

Brüche

Die rationalen Zahlen

- (O2) (Transitivität)

$$x > y \quad \text{und} \quad y > z \quad \Rightarrow \quad x > z$$

- (O3) (Verträglichkeit mit $+$ und $\cdot$)

$$x > y \quad \Rightarrow \quad x + z > y + z$$

$$x > y \quad \text{und} \quad z > 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot z > y \cdot z$$

- (AA) (Archimedisches Axiom) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$. Das Archimedische Axiom stellt sicher, dass $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten ist.

Einen Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot, >)$, der die Eigenschaften (O1)–(O3) und (AA) erfüllt, nennt man archimedisch angeordnet.

Irrationale Zahlen

Dezimaldarstellungen irrationaler Zahlen

- **Definition 9.1** (Irrationale Zahlen): Eine Dezimalzahl, die nicht als Bruch dargestellt werden kann, nennt man irrational.
- Irrationale Zahlen haben also nicht-periodische Dezimaldarstellungen.
- Einfaches Beispiel einer irrationalen Dezimalzahl:

$$0{,}123456789\,10\,11\,12\,\ldots\,.$$

Irrationale Zahlen

Beispiel (Irrationale Zahlen)

- Beispiele irrationaler Zahlen sind $x = \sqrt{p}$ für $p \in \mathbb{P}$.
- Beweis: Sei $p \in \mathbb{P}$ gegeben.
- Wäre
$$\frac{a}{b} = \sqrt{p} \qquad \text{also} \qquad \frac{a^2}{b^2} = p \qquad \text{bzw.} \qquad a^2 = p \cdot b^2$$
mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$.
- Offenbar gilt $p|a^2$ und daher (Faktorisierung!) auch $p|a$.
- Also ist $a = p\,c$ mit $c \in \mathbb{N}$ und somit
$$a^2 = p^2 \cdot c^2 = p \cdot b^2 \qquad \text{bzw.} \qquad p \cdot c^2 = b^2$$
und folglich $p|b$.
- Dies ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von a und b.

Zahlbereichserweiterungen

Die reellen Zahlen

- Wir erklären die Menge $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ zunächst als einen archimedisch angeordneten Körper.
- Er hat also alle Eigenschaften, die wir auch bereits bei $\mathbb{Q}$ behandelt haben.
- Hinzu kommt aber eine weitere Eigenschaft, die $\mathbb{Q}$ eben nicht hat, und die daher $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet.
- **Definition 10.5** (Die reellen Zahlen) $(\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ ist ein archimedisch angeordneter Körper mit der Intervallschachtelungseigenschaft. Außer den Gesetzen, die auch in $\mathbb{Q}$ gelten, gilt noch das Intervallschachtelungsaxiom.
- Man kann zeigen, dass hierdurch $\mathbb{R}$ im Prinzip eindeutig festgelegt ist.

Zahlbereichserweiterungen

Die reellen Zahlen

Abgeschlossene Intervalle bezeichnen wir wie üblich mit

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\} \, .$$

- **Definition 10.6** (Intervallschachtelung): Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei ein abgeschlossenes Intervall $I_k := [a_k, b_k]$ mit den Intervallgrenzen $a_k < b_k$ gegeben. Gilt $I_{k+1} \subseteq I_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so heißt $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.
- (ISA) (Intervallschachtelungsaxiom) Für jede reelle Intervallschachtelung $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [a_k, b_k] \text{ für alle } k\} \neq \emptyset \, .$$

Zahlbereichserweiterungen

Die reellen Zahlen

- **Definition 10.7** (Schrumpfende Intervallschachtelung)
  Sei $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Die Intervalllängen streben gegen 0, $|I_k| \to 0$, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit
  $$|I_{k_0}| \leq \frac{1}{n} \, .$$
  Man nennt die Intervallschachtelung dann schrumpfend.
- **Hilfssatz 10.8** (Schrumpfende Intervallschachtelung)
  Ist $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine schrumpfende Intervallschachtelung, so enthält der Durchschnitt $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$ höchstens eine Zahl.
- Zusammen mit dem ISA folgt dann also, dass in $\mathbb{R}$ jede schrumpfende Intervallschachtelung genau einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ erzeugt.

Zahlbereichserweiterungen

Beispiel (Eine Intervallschachtelung in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$)

- Wir betrachten die schrumpfende Intervallschachtelung

$$I_k = \left\{ x \in \begin{matrix} \mathbb{Q}_{>0} \\ \mathbb{R}_{>0} \end{matrix} \;\middle|\; 2 - \frac{1}{k} < x^2 < 2 + \frac{1}{k} \right\} .$$

- Offenbar gilt $I_{k+1} \subseteq I_k$, $|I_k| \to 0$, und der einzige Wert a, der in allen Intervallen I_k liegen kann, ist $a = \sqrt{2}$.
- Nun ist aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und somit das ISA in $\mathbb{Q}$ nicht erfüllt.
- Das ISA besagt also, dass derartige Prozesse in $\mathbb{R}$ immer einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ liefern.
- Dass $\frac{1}{k}$ für $k \to \infty$ gegen 0 strebt, ist übrigens eine Folge des Archimedischen Axioms.

Ungleichungen

Rechenregeln für Ungleichungen

- **Satz 11.1** (Rechenregeln für Ungleichungen)
  Die folgenden Regeln gelten für alle $a, x, y \in \mathbb{R}$:
  - (Addition) $x < y \Rightarrow a + x < a + y$
  - (Negatives) $x < y \Rightarrow -x > -y$
  - (Multiplikation) $x < y$ und $a > 0 \Rightarrow a\,x < a\,y$
  - (Multiplikation) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow a\,x > a\,y$
  - $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$
  - $1 > 0$
  - (Kehrwert) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
  - (Kehrwert) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
  - (Mittelwert) $x < y \Rightarrow x < \frac{1}{2}(x + y) < y$
- **Folgerung 11.2**: Nicht jeder Körper lässt sich wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ anordnen. Beispiele: $\mathbb{Z}_p$ für $p \in \mathbb{P}$ und $\mathbb{C}$.

Ungleichungen

Beispiel (Lineare Ungleichungen)

- Welche Lösungen hat die Ungleichung

$$5 + 2\,x < 4 + 3\,x\ ?$$

- Nach Umformung ergibt sich

$$x > 1\ .$$

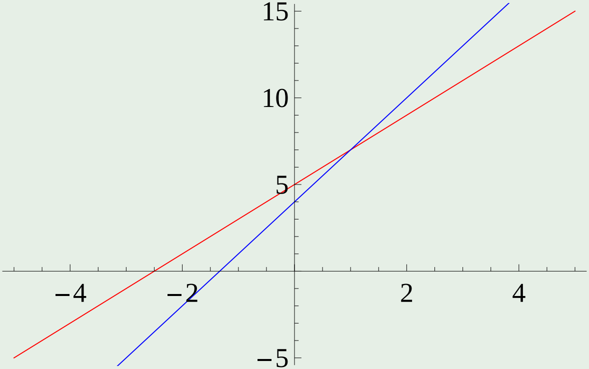
- Also ist die Lösungsmenge das Intervall

$$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \ = (1, \infty)\ .$$

Ungleichungen

Beispiel (Lineare Ungleichungen)

Graphische Darstellung der Ungleichung $5 + 2x < 4 + 3x$



Ungleichungen

Beispiel (Quadratische Ungleichungen)

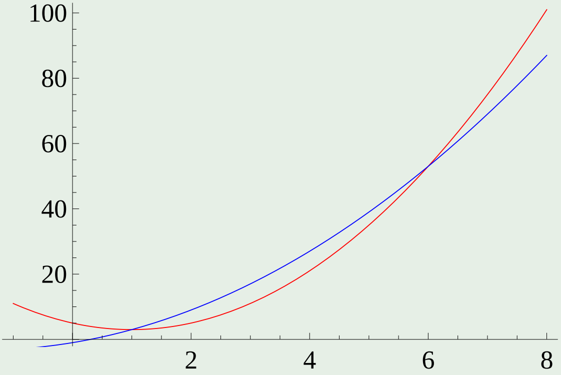
- Welche Lösungen hat die Ungleichung
$$2\,x^2 - 4\,x + 5 > x^2 + 3\,x - 1\ ?$$
- Nach Umformung ergibt sich
$$(x-6)\,(x-1) > 0\ .$$
- Also ist die Lösungsmenge die Vereinigung der Intervalle
$$L = \mathbb{R} \setminus [1,6] = (-\infty, 1) \cup (6, \infty)\ .$$

Ungleichungen

Beispiel (Quadratische Ungleichungen)

Graphische Darstellung der Ungleichung

$$2x^2 - 4x + 5 > x^2 + 3x - 1$$



Parabeln

Information zum Zeichnen: Scheitel einer Parabel

- Der Graph der Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine Parabel.
- Wo liegt der Scheitel?
- Quadratische Ergänzung liefert

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)
\end{aligned}
$$

- Also ist der Scheitel an der Stelle

$$S = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Ungleichungen

Dreiecksungleichung

- **Definition 11.3** (Betragsfunktion) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

- **Satz 11.4** (Rechnen mit Beträgen) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
  - $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
  - $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
  - (Dreiecksungleichung) $|x + y| \leqq |x| + |y|$
  - $||x| - |y|| \leqq |x - y|$

Funktionen

Abbildungen / Funktionen

- **Definition 12.4** (Abbildung): Seien $A, B \neq \emptyset$ zwei Mengen. Wird jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b = f(a) \in B$ zugeordnet, so sprechen wir von einer Abbildung (oder Funktion) f von A nach B.
- Wir schreiben $f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$.
- Die Menge A heißt Definitionsbereich von f.
- Die Menge B heißt Wertevorrat von f.
- Das Element $f(x) \in B$ heißt Wert von f an der Stelle $x \in A$.
- Die Menge $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$ heißt Bild von f.
- Für $C \subseteq B$ heißt $f^{-1}(C) := \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ das Urbild der Menge C.

Funktionen

Beispiel (Abbildungen / Funktionen)

- $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto f_1(n) =$ Quersumme von n
- $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto f_2(n) = n^2$
- $f_2(-1) = 1$, $f_2^{-1}(1) = \{-1, 1\}$ und $f_2^{-1}(\{-2, -1\}) = \emptyset$
- $f_3 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a, b) \mapsto f_3(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b)$
- $f_3^{-1}(2)$ sind Paare gerader Zahlen
- $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f_4(x, y) = x + y$
- $A =$ Bahnfahrer in ICE, $B =$ Sitzplätze im ICE, $x \mapsto f_5(x) =$ Sitzplatz der Person x. Unter welchen Voraussetzungen ist dies eine Funktion?
- $f^{-1}(B) = A$, aber im Allgemeinen ist $f(A) \subsetneq B$.
- $|f(\{a\})| = 1$ für alle $a \in A$.

Funktionen

Eigenschaften

Definition 12.5 Wir benennen einige wichtige spezielle Eigenschaften, die Funktionen haben können.

- (Surjektivität): Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Gilt $f(A) = B$, so heißt f surjektiv. Merkregel: Jedes $b \in B$ hat unter f mindestens ein Urbild.
- (Injektivität): Ist für $a \neq b$ stets $f(a) \neq f(b)$, so heißt f injektiv. Merkregel: Jedes $b \in B$ hat unter f höchstens ein Urbild.
- (Bijektivität): Ist f surjektiv und injektiv, so nennen wir f bijektiv. Merkregel: Jedes $b \in B$ hat unter f genau ein Urbild.

Funktionen

Beispiel

- Quersumme: Die Funktion f_1 ist surjektiv (jeder Wert kann als Quersumme vorkommen), aber nicht injektiv (aus der Quersumme lässt sich nicht eindeutig auf die Zahl schließen).
- Quadrat: Die Funktion f_2 ist weder injektiv noch surjektiv.
- Erklärt man dagegen $f_2' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$, so ist f_2' injektiv.
- ggT: Die Funktion f_3 ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Summe: Die Funktion f_4 ist surjektiv, aber nicht injektiv.
- Bahnfahrt: Ist mindestens ein Sitzplatz in der Bahn unbesetzt, so ist f_5 nicht surjektiv. Da wir annehmen können, dass auf keinem Sitz mehr als eine Person sitzt, ist f_5 aber injektiv.

Funktionen

Die Exponentialfunktion

- Wir erklären die Exponentialfunktion durch

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

- Es gilt auch

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

- Daher ist

$$\begin{aligned} \exp(x)\exp(y) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x + y + \frac{xy}{n}}{n}\right)^n = \exp(x+y) . \end{aligned}$$

Funktionen

Die Exponentialfunktion

- Eine stetige Funktion, welche das Potenzgesetz
$$f(x+y) = f(x)f(y)$$
(Funktionalgleichung) und die Anfangsbedingung
$$f(1) = a$$
erfüllt, ist eindeutig bestimmt.
- Daher ist
$$f(x) = a^x$$
(Potenzgesetz gilt ja für $x \in \mathbb{Q}$) und insbesondere
$$\exp(x) = e^x \ .$$

Funktionen

Die Exponentialfunktion

- Dabei ist

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\ldots .$$

- Die Exponentialfunktion lässt sich auch als Potenzreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

darstellen und so kann man e bestimmen:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} .$$

- Aus der Reihendarstellung folgt die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

Funktionen

Exponentialfunktion und Umkehrfunktion

Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ist

- stetig
- streng monoton wachsend
- positiv
- und hat folglich eine stetige Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$.
- Es gilt also

$$e^{\ln x} = x \qquad (\text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0})$$

- sowie

$$\ln e^x = x \qquad (\text{für alle } x \in \mathbb{R})\ .$$

Funktionen

Exponential-und trigonometrische Funktionen

- Exponentialfunktion, Cosinus- und Sinusfunktion werden jeweils durch ihre Taylorreihen dargestellt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \ ,$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \ ,$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \ .$$

Funktionen

Exponential-und trigonometrische Funktionen

- Setzt man in die Exponentialreihe den Wert ix ein, so erhält man durch Aufteilung in den geraden und den ungeraden Potenzanteil unmittelbar die Eulersche Identität

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \ .$$

- Setzt man hier wiederum den Wert $x = \pi$ ein, so erhält man die Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \ ,$$

welche die 5 wichtigsten Zahlen miteinander in Verbindung setzt.