

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2011

Aufgaben 1) und 2a) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1.

- a) Man beweise oder widerlege:

$$\{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 5a + 3b\} = \mathbb{Z}.$$

($\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ steht für die Menge der ganzen Zahlen.)

- b) Geben Sie die Menge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

explizit an, z.B. durch Auflisten ihrer Elemente. Begründen Sie die Aussagen, die Sie treffen.

Aufgabe 2. Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

- a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.
- b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. (Hier steht $\sum_{k=1}^n k$ für $1 + 2 + 3 + \dots + n$.)

Aufgabe 3. Prüfen Sie die folgenden Beweise auf Richtigkeit und geben Sie ggfs. an, was falsch gemacht wurde. (Kritisieren Sie aber bitte nicht zu viel.)

- a) *Behauptung:* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2n + 1 \leq 2^n$.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.
Induktionsschritt: Wir dürfen annehmen, daß $2n + 1 \leq 2^n$ (*) gilt. Wir müssen (unter dieser Annahme) zeigen, daß $2(n + 1) + 1 \leq 2^{n+1}$ gilt. Aus der Annahme (*) folgt leicht, daß $2n + 3 \leq 2^n + 2$ gilt. Also folgt

$$2n + 3 \leq 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n \leq 2^{n+1}$$

wie gewünscht.

b) *Behauptung:* Alle Pferde haben die selbe Farbe.

Beweis: Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$A(n)$: Jede n -elementige Menge von Pferden besteht aus lauter Pferden der selben Farbe.

Offenbar reicht es zu zeigen, daß $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies beweisen wir durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $A(0)$ ist richtig, da es im Fall $n = 0$ überhaupt keine Pferde gibt, die man vergleichen müßte.

Induktionsschritt: Nehmen wir an, daß $A(n)$ wahr ist. D.h. wir gehen davon aus, daß je n Pferde die selbe Farbe haben. (Dies nennen wir im folgenden Annahme *). Wir müssen zeigen, daß je $n + 1$ Pferde die selbe Farbe haben. Dies ist aber unter der Annahme * klar.

Also ist die Behauptung bewiesen.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 26.04.2011 in der Vorlesung *spätestens bis 08:15 Uhr* abgegeben werden.