Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Blatt 03
27.04.2011

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2011

Aufgaben 2a) und 4b) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Zur Erinnerung: Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man $n!$ rekursiv durch $0! := 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$. Dann gilt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Ferner wurde der Binomialkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \in \{0, \cdots, n\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Beweisen Sie anhand dieser Definitionen:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Aufgabe 2.

a) Entscheiden Sie von den folgenden Abbildungen jeweils, ob sie injektiv bzw. surjektiv sind.

   i) $f_1 : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2\}$ definiert durch

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	1	2	2	0.

   ii) $f_2 : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3,4\}$ definiert durch

x	0	1	2	3
$f_2(x)$	0	4	1	2.

   iii) $f_3 : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ x \mapsto x^2$.

   iv) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^2$.

b) Geben Sie Abbildungen $g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit folgenden Eigenschaften an: g_1 ist weder injektiv noch surjektiv, g_2 ist injektiv und nicht surjektiv, g_3 ist surjektiv und nicht injektiv, g_4 ist bijektiv.

Begründen Sie alle Aussagen, die Sie treffen.

Aufgabe 3. Sei X eine endliche Menge und $f : X \to X$ eine Abbildung. Man beweise: Wenn f surjektiv ist, dann ist f bijektiv. (Bemerkung: Dies wurde in der Vorlesung behauptet aber nicht bewiesen.)

Aufgabe 4. Wir betrachten Permutationen der Menge $X = \{1, 2, \cdots, 9\}$.

a) Ergänzen Sie:

$$(132) \circ (57) \circ (289) \circ (45) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

b) Schreiben Sie die Permutation aus a) als ein Produkt von *disjunkten* Zyklen.

c) Sei $i_1, \cdots, i_s \in \{1, \cdots, n\}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie: Der Zyklus $(i_1 i_2 \cdots i_s) \in S_n$ kann als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. (Zur Erinnerung: Eine Transposition ist ein Zyklus der Länge 2.)

d) Schreiben Sie die Permutation aus a) als ein Produkt von Transpositionen.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 04.05.2011 in der Vorlesung *spätestens bis 08:15 Uhr* abgegeben werden.