

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2011

Berichtigte Version vom 24.06.2011.

Aufgaben 1) und 2a) ist relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Die Zufallsvariable X beschreibe den Ausgang eines einmaligen Wurfes mit einem (fairen) Tetraeder, dessen Seiten mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 beschriftet sind. Der Wertebereich von X ist also $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und $P(X = i) = \frac{1}{4}$ für $i \in \Omega$.

- Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$.
- Sei $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Berechnen Sie die exakten Werte von $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ für $k = 1$, $k = 1.25$ und $k = 1.5$ und vergleichen Sie diese mit den Abschätzungen, die sich aus der Ungleichung von Chebyshev ergeben.

Aufgabe 2. Ein Versuch mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ (0=Niete, 1=Treffer) und Trefferwahrscheinlichkeit p wird solange unabhängig wiederholt, bis ein Erfolgs-Run der Länge r beobachtet wird. Sei X_i die Zufallsvariable "Ergebnis des i -ten Versuchs". Sei

$$T_r := \min\{k : X_k = X_{k-1} = \dots = X_{k-r+1} = 1\}$$

die Wartezeit bis zum Ende des ersten Erfolgs-Runs der Länge r .

- Berechnen Sie im Fall $p = \frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeiten $P(T_3 = 3)$, $P(T_3 = 4)$, $P(T_3 = 5)$, $P(T_3 = 6)$ und $P(T_3 = 7)$.
- Finden Sie für allgemeines $p \in [0, 1]$ einen expliziten Ausdruck $f(p)$ mit $P(T_{100} = 103) = f(p)$.

Aufgabe 3. Wir betrachten für $p \in]0, 1[$ und $r \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = \frac{t^r p^r (1 - tp)}{1 - t + t^{r+1} p^r (1 - p)}.$$

Berechnen Sie den linksseitigen Limes $\lim_{t \rightarrow 1-0} g'(t)$. (Bemerkung: Diese Berechnung wird in der Vorlesung gebraucht, um den Erwartungswert der Zufallsvariablen T_r aus Aufgabe 2 zu bestimmen.)

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 29.06.2011 in der Vorlesung *spätestens bis 08:15 Uhr* abgegeben werden.