Walter Strampp

AUFGABEN ZUR WIEDERHOLUNG

Mathematik IV

1 Grundlagen

Aufgabe 1.1: Zahlen in Gleitpunktdarstellung angeben:

Auf einer Maschine werden Zahlen in Gleitpunktdarstellung $x = \pm a\, 10^b$ erfasst. Die Stellenzahl der Mantisse a betrage fünf, und der Exponent b werde auf ein Intervall $-4 \le b \le 4$ eingeschränkt. Wie lautet die Gleitpunktdarstellung der Zahlen 2, 0.002 und -0.31246? Welche Zahlen können insgesamt erfasst werden?

Aufgabe 1.2: Rundungsfehler abschätzen:

Eine Maschine arbeite mit der Genauigkeit τ. Welcher absolute Fehler entsteht bei der Auswertung der Funktion $y = f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$ höchstens, wenn die Eingaben mit absoluten Fehlern $\triangle x_1$ bzw. $\triangle x_2$ behaftet sind. Man verwende die Formel:

$$|\triangle y_r| \approx \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right| |\triangle x_k| + |y|\, \tau \, .$$

Aufgabe 1.3: Vollständiges Horner-Schema anwenden:

Das Polynom

$$p_4(x) = 2\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$$

besitzt eine Nullstelle bei $x = 1$.
Mit dem Hornerschema soll eine Faktorisierung

$$p_4(x) = (x-1)\,(c_3\,x^3 + c_2\,x^2 + c_1\,x + c_0)$$

angegeben sowie die Ableitungen von p_4 an der Stelle $x = 1$ berechnet werden.

Aufgabe 1.4: Modifiziertes Horner-Schema anwenden:

Mit dem modifizierten Horner-Schema schreibe man das Polynom

$$\begin{aligned} p_4(x) \quad = \quad & 3 + 2\,(x+1) - 2\,(x+1)\,(x-1) \\ & +4\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3) \\ & -5\,(x+1)\,(x-1)\,(x-3)\,(x+2) \end{aligned}$$

in der Form $p_4(x) = c_4\,x^4 + c_3\,x^3 + c_2\,x^2 + c_1\,x + c_0$.

2 Interpolation

Aufgabe 2.1: Interpolationspolynom berechnen:

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = -2$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$ und die Stützwerte $y_0 = 0$, $y_1 = -3$, $y_2 = 2$, $y_3 = 6$. Man berechne das Interpolationspolynom vom Grad 3 auf direktem Weg und mit der Lagrange-Methode.

Aufgabe 2.2: Interpolationsfehler abschätzen:

Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

und folgende Tabelle von Stützwerten und Stützstellen:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	$f(0)$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$f(1)$

Man gebe eine Abschätzung des Interpolationsfehlers im Intervall $[0, 1]$.

Aufgabe 2.3: Newton-Interpolationspolynom berechnen und in Normalform bringen:

Gegeben seien die Stützwerte und Stützstellen:

x_i	1	2	3	5
y_i	1	3	2	4

Man bestimme das Interpolationspolynom $N_3(x)$ in der Form von Newton, und bringe es anschließend mit dem modifizierten Hornerschema in die Normalform $N_3(x) = a_3\, x^3 + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0$.

Aufgabe 2.4: Potenzen durch fallende Faktorielle ausdrücken:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} x^n &= S_{n0} + S_{n1}\, x + S_{n2}\, x\,(x-1) + S_{n3}\, x\,(x-1)\,(x-2) + \cdots \\ &\quad + S_{nn}\, x\,(x-1)\,(x-2)\,\cdots\,(x-n+1)\,. \end{aligned}$$

Man drücke die Koeffizienten S_{nk} durch dividierte Differenzen aus.

Aufgabe 2.5: Dividierte Differenzen bei äquidistanten Stützstellen

Die k-ten Differenzen werden wie folgt rekursiv definiert:

$$\Delta^0 y_i = y_i\,, \quad \Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i\,.$$

$$k = 0, 1, \ldots, n\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-k\,.$$

Mit $x_i = x_0 + i\,h$, $h > 0$, zeige man: $y[x_{i+k}, x_{i+k-1}, \ldots, x_i] = \dfrac{\Delta^k y_i}{k!\,h^k}$.

Aufgabe 2.6: Methode von Aitken-Neville anwenden

Gegeben seien die Stützstellen und Stützwerte:

i	0	1	2
x_i	-1	1	3
y_i	3	9	-5

Man bestimme das Interpolationspolynom $N_2(x)$ in der Form von Newton. Mit der Methode von Aitken-Neville berechne man den Wert $N_2(4)$.

3 Approximation

Aufgabe 3.1: Ausgleichspolynom berechnen

Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4
x_i	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8
y_i	1	-0.5	-1	2	3.5

Man bestimme das Ausgleichspolynom ersten bzw. zweiten Grades nach der Fehlerquadratmethode.

Aufgabe 3.2: Ausgleichsgerade und weitere minimierende Polynome angeben

Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4
x_i	0	1	2	3	4
y_i	-3	-2	-1	0	1

Man bestimme die Ausgleichsgerade. Für welche Polynome sechsten Grades $\psi(x)$ wird die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=0}^{4}(y_i - \psi(x_i))^2$ minimal?

4 Quadratur

Aufgabe 4.1: Quadraturformel herstellen

In der Quadraturformel

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx \approx A_0\, f(-1) + A_1\, f(0) + A_2\, f(3)$$

sollen die Gewichte A_0, A_1, A_2 mit zwei verschiedenen Ansätzen so bestimmt werden, dass Polynome vom Grad ≤ 2 exakt integriert werden.

Aufgabe 4.2: Simpson-Regel anwenden

Man berechne das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

näherungsweise mit der Simpson-Regel und vergleiche mit dem exakten Wert.

Aufgabe 4.3: Summierte Trapez-Regel anwenden, Fehler abschätzen

Das Integral $\int_0^2 x^2\,dx$ wird näherungsweise mit der Summierte Trapez-Regel berechnet. Welcher Fehler tritt dabei auf? Welcher Näherungswert und welcher Fehler ergibt sich für $N = 4$?

5 Fixpunkte und Nullstellen

Aufgabe 5.1: Fixpunktsatz anwenden

Man zeige, dass die Schrittfunktion $\phi(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ im Intervall [0,1] die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt. Wieviele Iterationsschritte müssen durchgeführt werden, damit die Abweichung vom Fixpunkt $|x^{(\nu)} - \bar{x}| \leq 0.0001$ wird, wenn man $x^{(0)} = 0$ wählt?

Aufgabe 5.2: Wurzel mit dem Newton-Verfahren berechnen

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^2 - 3\,, \quad x > 0\,.$$

Mit dem Fixpunktsatz zeige man, dass das Newton-Verfahren gegen die Nullstelle $\sqrt{3}$ konvergiert. Man gebe eine Abschätzung des Abweichung der ν-ten Iterierten $|x^{(\nu)} - \sqrt{3}|$ von $\sqrt{3}$. Welche Startwerte sind geeignet?

Aufgabe 5.3: Nullstelle eines Polynoms mit dem Newton-Verfahren berechnen

Gegeben sei das Polynom

$$f(x) = x^3 + x^2 + 2\,x + 1\,.$$

Man zeige, dass im Intervall $[-1, 0]$ genau eine Nullstelle liegt und berechne sie näherungsweise mit dem Newtonverfahren (Startwert $x^{(0)} = \frac{1}{2}$).