Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Blatt 02
18.04.2012

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2012

Aufgaben 1b) und 1c) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Wir betrachten die folgenden Mengen:

$$X = \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 18a + 12b\},$$

$$Y = \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 5a + 3b\}.$$

Man beweise oder widerlege:

a) $X = \mathbb{Z}$.

b) $Y = \mathbb{Z}$.

c) $X \subset G$, wobei $G := \{x \in \mathbb{Z} : \text{Es gibt } u \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2u\}$ die Menge der geraden Zahlen ist.

d) $G \subset X$.

(Hinweis: Vgl. Axiom (F1) und Beispiel 2 in Abschnitt I.2. für die Grundstruktur eines Beweises der Gleichheit zweier Mengen.)

Aufgabe 2. Wir betrachten die Menge $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$. Ferner sei $\Gamma := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann ist K ein Kreis und Γ ein Gitter in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Fertigen Sie eine geeignete Skizze an!

a) Ergänzen Sie zu einer wahren Aussage und geben Sie dann einen stichhaltigen formalen Beweis für diese Aussage. (Hinweis: Vgl. Axiom (F1) und Beispiel 2 in Abschnitt I.2. für die Grundstruktur eines Beweises der Gleichheit zweier Mengen.)

$$\Gamma \cap K = \{(\ ,\ ), (\ ,\ ), (\ ,\ ), (\ ,\ )\}.$$

b) Geben Sie mindestens fünf Elemente von $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap K$ an. (Das Konstruieren des fünften Elementes ist nicht ganz einfach. Lassen Sie sich etwas einfallen!)

Aufgabe 3. Geben Sie die folgenden Mengen explizit (z.B. durch Auflisten ihrer Elemente) an: $\mathcal{P}(\{1\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})))$ und $\mathcal{P}(\emptyset)$.

Allgemeiner Hinweis: Grundsätzlich sollen Sie im Übungsbetrieb alle Aussagen begründen, sofern nicht explizit etwas anderes gesagt wird. Bei Rechenaufgaben ist der vollständige Rechenweg als Begründung mit anzugeben.

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens am Mittwoch den 25.04.2012 um 08:15 Uhr in den Kasten vor Raum 2303 eingeworfen werden.