

## Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2012

*Aufgaben 1a) und 4c) sind relevant für den Scheinerwerb.*

**Aufgabe 1.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

- a) Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  ist  $3^n - 3$  durch 6 teilbar.
- b) Für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ . (Hier steht  $\sum_{k=1}^n k$  für  $1+2+3+\dots+n$ .)

**Aufgabe 2.** Prüfen Sie den folgenden Beweis auf Richtigkeit und geben Sie ggfs. an, was falsch gemacht wurde. (Kritisieren Sie aber bitte nicht zu viel.)

*Behauptung:* Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $2n + 1 \leq 2^n$ .

*Beweis:* Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für  $n = 0$  ist die Aussage richtig.

Induktionsschritt: Wir dürfen annehmen, daß  $2n + 1 \leq 2^n$  (\*) gilt. Wir müssen (unter dieser Annahme) zeigen, daß  $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$  gilt. Aus der Annahme (\*) folgt leicht, daß  $2n+3 \leq 2^n+2$  gilt. Also folgt

$$2n + 3 \leq 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

wie gewünscht.

**Aufgabe 3.** Zur Erinnerung: Für  $n \in \mathbb{N}$  definiert man  $n!$  rekursiv durch  $0! := 1$  und  $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ . Dann gilt:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ . Ferner wurde der Binomialkoeffizient definiert durch

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{falls } k \in \{0, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ .

Beweisen Sie anhand dieser Definitionen:

- a) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ .
- b) Für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .
- c) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

**Bitte wenden**

**Aufgabe 4.** Entscheiden Sie von den folgenden Abbildungen jeweils, ob sie injektiv bzw. surjektiv sind. Begründen Sie alle Aussagen, die Sie treffen!

a)  $f_1 : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$  definiert durch

$x$	0	1	2	3
$f_1(x)$	1	2	2	0.

b)  $f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$  definiert durch

$x$	0	1	2	3
$f_2(x)$	0	4	1	2.

c)  $f_3 : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ,  $x \mapsto x^2$ .

d)  $f_4 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^2$ .

**Abgabe:** Die Lösungen müssen spätestens am Mittwoch den 02.05.2012 um 08:15 Uhr abgegeben werden.