Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Blatt 09
06.06.2012

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2011

Aufgaben 1a) und 2b) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. (Das Monty-Hall-Problem) In einer amerikanischen Fernsehshow wird folgendes Spiel angeboten: Kandidat und Showmaster stehen auf einer Bühne. In der Rückwand sind drei Türen eingelassen. Hinter zwei der Türen steht eine Ziege und hinter einer Türe der Hauptgewinn. Der Kandidat wählt zunächst eine der Türen aus. Diese wird (etwa durch das Einschalten einer Lampe oberhalb der Türe) markiert aber nicht geöffnet. Der Showmaster, der die Position der Ziegen kennt, öffnet nun eine der nicht markierten Türen, hinter der eine Ziege steht. (Dies ist immer möglich.) Danach wird der Kandidat gefragt, ob er bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben möchte, oder ob er zu der anderen noch verschlossenen Türe wechseln will. Seine jetzige Entscheidung zählt - ist der Hauptgewinn hinter der im 2. Versuch gewählten Türe, so bekommt er ihn; anderenfalls geht er leer aus. Es stellt sich die Frage wie sich der Kandidat verhalten sollte.

a) Nehmen wir an, der Kandidat legt von vorne herein fest, dass er im 2. Schritt bei seiner ursprünglichen Wahl bleibt. Was ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit bei dieser Strategie?

b) Nehmen wir an, der Kandidat legt von vorne herein fest, dass er im 2. Schritt die Türe wechselt. Was ist seine Gewinnwahrscheinlichkeit bei dieser Strategie?

c) Sei $0 \leq \alpha \leq 1$. Der Kandidat könnte auch nach folgender Strategie $S(\alpha)$ spielen: Er wechselt in Schritt 2 die Türe mit Wahrscheinlichkeit α. ($S(0)$ ist die Strategie aus a). $S(1)$ ist die Strategie aus b). $S(\frac{1}{2})$ würde bedeuten, dass der Kandidat in Schritt 2 eine Münze wirft und genau dann wechselt, wenn Kopf kommt.) Berechnen Sie in Abhängigkeit von α die Gewinnwahrscheinlichkeit bei Strategie $S(\alpha)$.

Bemerkung: Randomisierte Strategien wie in c) kommen in der Spieltheorie häufig vor.

Zur Erinnerung: Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subset \Omega$. Die Familie (A, B, C) ist unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ und $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ gilt.

Aufgabe 2. Eine Münze wird drei mal geworfen. Wir betrachten den Ergebnisraum $\Omega := \{K, Z\}^3$ mit der Gleichverteilung P. Sei A das Ereignis, daß mindestens zwei mal Kopf kommt. Sei B das Ereignis, daß beim ersten Wurf Kopf kommt. Sei $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_2 = x_3\}$ das Ereignis, daß beim zweiten und dritten Wurf die gleiche Seite der Münze oben liegt.

a) Berechnen Sie $P(A \cap B \cap C)$ und $P(A)P(B)P(C)$.

b) Ist die Familie (A, B, C) von Ereignissen unabhängig? (Geben Sie eine klare Begründung für Ihre Aussage!)

Aufgabe 3. Auf $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir das Wahrscheinlichkeitsmaß P mit $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$ und $P(5) = P(6) = \frac{1}{4}$. (Man kann sich das Würfeln mit einem *unfairen* Würfel vorstellen.) Sei $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{5, 6\}$, C=$\{3, 4, 5\}$. Untersuchen Sie (mit Begründung) die folgenden Familien auf Unabhängigkeit: (A, B), (A, C), (B, C) und (A, B, C).

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 13.06.2012 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.