Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Dr. Sebastian Petersen

Blatt 11
20.06.2012

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Sommersemester 2012

Aufgaben 2b) und 3a) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Man beweise: Wenn $X(\Omega) = \{0, 1\}$ gilt, dann gilt

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1 - X).$$

Aufgabe 2. Ein Versuch mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ (1 bedeutet Treffer und 0 Niete) und Trefferwahrscheinlichkeit p wird n mal unabhängig wiederholt. Ergebnissraum des gesamten Experiments ist also $\Omega := \{0, 1\}^n$. Sei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfes und $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ der Mittelwert dieser Zufallsvariablen auf Ω. Sei $\varepsilon > 0$.

a) Welche Abschätzung liefert die Ungleichung von Chebyshev für $P(|M - p| \geq \varepsilon)$?

b) Beweisen Sie, daß
$$P(|M - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$
gilt. (Hinweis: Lösen Sie zunächst a). Was ist das Maximum der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1 - x)$?)

c) Sei nun $n = 100$ und $p = 0.5$. Welche Abschätzung für $P(|M - p| \geq \varepsilon)$ erhält man für $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.001$?

d) Berechnen Sie im Fall $n = 100$, $p = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ den exakten Wert von $P(|M - p| \geq \varepsilon)$.

Aufgabe 3. Ein Versuch mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ und Trefferwahrscheinlichkeit p werde unabhängig wiederholt. Sei X_i das Ergebnis des i-ten Versuches. Dann sind also $X_1, X_2, X_3, \cdots$ unabhängige Zufallsvariable mit $P(X_i = 1) = p$.

a) Sei $W = \min\{k \in \mathbb{N} : X_{k+1} = X_{k+2} = X_{k+3} = 1\}$ die Wartezeit auf das erste Erscheinen einer Abfolge von drei sukzessiven Treffern. Berechnen Sie $P(W = 0)$, $P(W = 1)$ und $P(W = 7)$.

b) Sei $S = \min\{k \in \mathbb{N} : X_{k+1} = X_{k+2})$ die Wartezeit auf die erste Abfolge von zwei gleichen Versuchsergebnissen. Entwickeln Sie eine Formel für $P(S = r)$ (in Abhängigkeit r und p) und berechnen Sie $\mathbb{E}(S)$ (in Abhängigkeit von p). (Hinweis: Hier ist ein ähnliches Vorgehen wie im Beweis von III.6.6. möglich. Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach.)

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch den 27.06.2012 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.