Beweis durch Vollständige Induktion, Monotonie und Grenzwerte der Folgen

Dr. E. Nana Chiadjeu

UNIKASSEL
VERSITÄT

30. 04. 2014

1. Beweis durch Induktion

2. Berechnung der Grenzwerte

Beweis durch Induktion

Aufgabe 1 Gegeben sei die Folge definiert durch
$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}, n \in \mathbb{N}, \ a_0 = 1.$

(i) Man zeige durch vollständige Induktion, dass a_n streng monoton steigend ist.

(ii) Die Folge (a_n) ist beschränkt (dies muss nicht bewiesen werden). Man berechne den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Beweis durch Induktion

Aufgabe 1 Vollständige Induktion: $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 1$.
Induktionsanfang: $n = 1$

$$a_1 = \sqrt{a_0 + 6} = \sqrt{1 + 6} = \sqrt{7} > 1 \quad \text{d.h.} \quad a_1 > a_0 \ .$$

Induktionsannahme: wir nehmen an, dass $a_n > a_{n-1}$ für irgend ein $n \in \mathbb{N}$
Induktionsschluss: (Zu zeigen: $a_{n+1} > a_n$**)**
Aus der Induktionsannahme folgt:

$$\begin{aligned} a_n &> a_{n-1} \\ \iff \quad a_n + 6 &> a_{n-1} + 6 \\ \iff \quad \sqrt{a_n + 6} &> \sqrt{a_{n-1} + 6} \\ \iff \quad a_{n+1} &> a_n \end{aligned}$$

Beweis durch Induktion

Grenzwert: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 6} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 6}$$

$$\Longleftrightarrow a = \sqrt{a+6} \Longleftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$$

$$\Longleftrightarrow a = 3 \quad \text{oder} \quad a = -2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

da a_n eine positive Folge ist.

Beweis durch Induktion

Aufgabe 2

Durch die Rekursion

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}\,, \quad a_0 = 0\,, a_1 = 1\,,$$

wird die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert. Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man durch vollständige Induktion:

$$a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n\,.$$

Lösung

1. Induktionsanfang: n=1

$$a_1 + 1 = a_1 + a_{1-1} \iff a_2 = a_1 + a_0 = 0 + 1 = 1 \iff a_2 = 1\,.$$

$$a_2\, a_0 - a_1^2 = 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$$

Beweis durch Induktion

(b) Induktionsannahme
Wir nehmen an, dass $a_{n+1}\, a_{n-1} - a_n^2 = (-1)^n$ für irgend ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Induktionsschluss
Zu zeigen ist es:

$$a_{(n+1)+1} a_{(n+1)-1} - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1} \quad \text{d.h} \quad a_{n+2} a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+2} a_n - a_{n+1}^2 &= (a_{n+1} + a_n) a_n - a_{n+1}^2 \quad \text{da} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\
&= a_{n+1} a_n + a_n^2 - a_{n+1}^2 \\
&= a_{n+1}(a_n - a_{n+1}) + a_n^2 \\
&= a_{n+1}(-a_{n-1}) + a_n^2, \quad \text{da} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \\
&= -(a_{n+1} a_{n-1} - a_n^2) \\
&= -(-1)^n \quad \text{(Induktionsannahme)} \\
&= (-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 3

Man bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{3n+8}{\sqrt{7n^2+6n+1}+9n} \, .$$

Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 4

Man bestimme den Grenzwert der Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} = \infty - \infty \ = ???$$

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+2} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{(n+1) - (n+2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{-2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} = \frac{-2}{\infty + \infty} = 0 \, .$$

Berechnung der Grenzwerte

Aufgabe 5 Man zeige, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \qquad \text{Hinweis:} \quad \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)} .$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)} - \frac{1}{(k+2)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1+1}^{\infty} \frac{1}{k+2-1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{1+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} .
\end{aligned}$$