

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Ein Würfel wird 50 mal geworfen. Ergebnisraum ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{50}$ mit der Gleichverteilung P . Sei $X_i : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ die Zufallsvariable, die das Ergebnis des i -ten Wurfes wiedergibt, $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$ die Summe und $M := \frac{1}{50}(X_1 + \dots + X_{50})$ der Mittelwert der geworfenen Augenzahlen.

- Berechnen Sie die Varianzen $\mathbb{V}(X_i)$ und $\mathbb{V}(S)$.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(M)$ und die Varianz $\mathbb{V}(M)$ vom M .
- Welche Abschätzung nach oben liefert die Ungleichung von Chebyshev für die Wahrscheinlichkeiten $P(|M - \mathbb{E}(M)| \geq t)$ für $t = 0,01$, $t = 1$ und $t = 4$?

Aufgabe 2. Bei dem Glücksspiel "Chuck a luck" setzt der Spieler seinen Einsatz auf eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dann wird mit drei Würfeln gewürfelt. Erscheint die vom Spieler gewählte Zahl einmal, zweimal oder dreimal, so bekommt er seinen Einsatz doppelt, dreifach oder vierfach zurück. Wenn die vom Spieler gewählte Zahl nicht erscheint, dann verliert er seinen Einsatz. Berechnen Sie den Erwartungswert für die den Gewinn des Spielers beschreibende Zufallsvariable.

Aufgabe 3. n Studierende torkeln nach einem Fest in die Betten ihres großen Schlafsaals. Obwohl jedem Studierenden bereits ein Bett zugewiesen wurde, legt sich jeder völlig willkürlich in irgendein Bett. Wir denken uns die Studierenden und die Betten nummeriert, so dass wir die Situation als Wahrscheinlichkeitsraum mit der Menge $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}^{n, \neq}$ als Ereignisraum und der Gleichverteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß beschreiben können.

Für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $\omega \in \Omega$ definieren wir durch $X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Zufallsvariable X_i , die misst, ob der i -te Studierende im richtigen Bett liegt. Somit ist $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ die Anzahl der Studierenden, die im richtigen Bett liegen.

Aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 10 zur Vorlesung ist bekannt, dass $\mathbb{E}(Y) = 1$ gilt.

- Berechnen Sie für $i \neq j$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X_i \cdot X_j = 1)$ und $P(X_i \cdot X_j = 0)$, sowie $P(X_i^2 = 1)$ und $P(X_i^2 = 0)$.
- Entscheiden Sie, ob $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen ist.
- Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}(Y)$.

Abgabe: Die Lösungen müssen spätestens bis Mittwoch, den 08.07.2015, um 08:15 Uhr in den Kasten vor Raum 2303 eingeworfen werden.