Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 3

Abgabe bis 04.05.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion:

a) Für alle positiven natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar.

b) Für alle positiven natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Man beweise oder widerlege:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 5a + 3b\} = \mathbb{Z}.$$

($\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$ steht für die Menge der ganzen Zahlen.)

b) Geben Sie die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 2y^2 = 3\right\} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

explizit an, d.h. durch Auflisten ihrer Elemente. Begründen Sie die Aussagen, die Sie treffen.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 3

a) Für alle positiven natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{j=1}^{n} j$.

Beweise Sie durch vollständige Induktion dass $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Finden Sie die rekursive Definition für s_n. ($s_0 = \dots$, $s_{n+1} = f_{n+1}(s_n)$.)

b) Beweise Sie durch vollständige Induktion, dass für alle positiven natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$$

Aufgabe 4

a) Man beweise oder widerlege:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 4a + 8b\} = 2\mathbb{Z}.$$

($2\mathbb{Z} := \{2z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ steht für die Menge der durch 2 teilbaren ganzen Zahlen.)

b) Man beweise oder widerlege:

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 9a + 3b\} = 3\mathbb{Z}.$$

($3\mathbb{Z} := \{3z \mid z \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$ steht für die Menge der durch 3 teilbaren ganzen Zahlen.)

c) Geben Sie die Menge

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x, y) \neq (0, 0) \text{ und } \frac{6}{x^2 + y^2} \in \mathbb{Z}\right\} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

explizit an, d.h. durch Auflisten ihrer Elemente. Begründen Sie die Aussagen, die Sie treffen.

Aufgabe 5 (optional)
Zeigen Sie, dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.