Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 4

Abgabe bis 11.05.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie von den folgenden Abbildungen jeweils, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Begründen Sie Ihre Antworten!!!

a) $f_1 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2\}$ definiert durch:

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	2	1	1	0

b) $f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definiert durch:

x	0	1	2	3
$f_2(x)$	0	1	4	2

c) $f_3 : \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ x \mapsto x^4$

d) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^4$

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Wir betrachten die Menge S_9 der Permutationen der Menge $\{1, 2, \cdots, 9\}$.

a) Berechnen Sie die Wertetabelle der folgenden Hintereinanderausführung von Zyklen:

$$(1357) \circ (129) \circ (5678) \circ (167)$$

b) Schreiben Sie die folgende durch ihre Wertetabelle gegebene Permutation als ein Produkt von disjunkten Zyklen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 9 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X, Y \neq \emptyset$. Beweisen Sie die Aussage:

f ist genau dann surjektiv, wenn es eine Abbildung $u : Y \to X$ mit $f \circ u = Id_Y$ gibt.

[Hinweis: Zeigen Sie die beiden Implikationen

a1) Wenn es eine Abbildung $u : Y \to X$ mit $f \circ u = Id_Y$ gibt, so ist f surjektiv.

a2) Ist f surjektiv, dann gibt es eine Abbildung $u : Y \to X$ mit $f \circ u = Id_Y$.]

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Entscheiden Sie von den folgenden Abbildungen f_i jeweils, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $f_1 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definiert durch die Wertetabelle:

x	0	1	2	3
$f_1(x)$	2	4	1	0

b) $f_2 : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ definiert durch die Wertetabelle:

x	0	1	2	3
$f_2(x)$	1	0	1	2

c) $f_3 : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\},\ x \mapsto x^2$

d) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^3$

Aufgabe 5
Wir betrachten die Menge S_9 der Permutationen der Menge $\{1, 2, \cdots, 9\}$.

a) Berechnen Sie die Wertetabelle der folgenden Hintereinanderausführung von Zyklen:

$$(135) \circ (12) \circ (4567) \circ (679)$$

b) Schreiben Sie die folgende durch ihre Wertetabelle gegebene Permutation als ein Produkt von disjunkten Zyklen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 1 & 4 & 8 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a1) Wenn es eine Abbildung $v : Y \to X$ mit $v \circ f = Id_X$ gibt, dann ist f injektiv.
[Hinweis: Zeigen Sie die Kontraposition. Benutzen Sie: f ist injektiv genau dann, wenn: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.]

a2) Ist f injektiv und $X \neq \emptyset$, dann gibt es eine Abbildung $v : Y \to X$ mit $v \circ f = Id_X$.
[Hinweis: Konstruieren Sie eine Abbildung v, so dass $v(f(x)) = Id_X(x) = x$ für alle $x \in X$ gilt.
Dazu müssen Sie die Werte $v(y)$ für alle $y \in f(X) \subseteq Y$ richtig definieren; betrachten Sie dafür die Faser von jedem solchen y genauer. Für $y \in Y \setminus f(X)$ können Sie beliebige Werte $v(y) \in X$ wählen (Wieso?).]

Aufgabe 7 (optional)
Konstruieren Sie jeweils ein Beispiel einer Abbildung ...

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die surjektiv aber nicht injektiv ist,

b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 8 (optional)
Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage gilt: Sind n Personen in einem Raum versammelt, so sind entweder alle Personen weiblich oder alle Personen männlich.
Für $n = 1$ ist das offensichtlich richtig, d.h. der Induktionsanfang ist gesichert. Für den Induktionsschluss betrachten wir einen Raum, in dem $n + 1$ Personen versammelt sind. Wir schicken eine beliebige Person X hinaus, so dass nur noch n Personen in dem Raum bleiben, die nach Induktionsannahme entweder alle männlich oder alle weiblich sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall, dass alle Personen weiblich sind. Nun holen wir X wieder herein und schicken eine andere Person Y hinaus. Da nun auch wieder nur noch n Personen zurück bleiben, erhalten wir aus der Induktionsannahme, dass wieder entweder alle weiblich oder alle männlich sein müssen. Insbesondere hat also X das selbe Geschlecht wie die im Raum verbliebenen Personen, ist also auch weiblich. Insgesamt sind also alle $n + 1$ Personen in dem Raum weiblich.
Wo ist der Fehler?