Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 5

Abgabe bis 18.05.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Die internen Telefonnummern in der Telefonanlage eines Unternehmens seien vierstellig, wobei nur die ungeraden Ziffern $1, 3, 5, 7, 9$ verwendet werden.

a) Wie viele Telefonnummern können insgesamt vergeben werden?

b) Wie viele Telefonnummern haben die Eigenschaft, dass genau zweimal die Ziffer 1 enthalten ist?

c) Wie viele Telefonnummern haben die Eigenschaft, dass keine zwei benachbarten Ziffern gleich sind?

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Eine Gruppe aus 11 verschiedenen Personen möchte in den Urlaub fahren. Zur Verfügung steht ein Auto mit 4 Plätzen, ein Auto mit 5 Plätzen und ein Gepäckbus mit 2 Plätzen. Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es? (Zwischen den Sitzordnungen innerhalb der einzelnen Fahrzeuge soll nicht unterschieden werden.)

Aufgabe 3 (4 Punkte + 1 Bonuspunkt)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n := \{x \in \{0,1\}^n \mid \forall i \in \{1,\dots,n-1\} : \ x_i + x_{i+1} \leq 1\}$ die Menge der Worte der Länge n über dem Alphabet $\{0,1\}$, in denen keine zwei benachbarten Zeichen 1 sind. Ferner sei $f_n := |X_n| = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

a) Berechnen Sie f_n für $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

b) Beweisen Sie: Es gilt $f_1 = 2$, $f_2 = 3$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für alle $n \geq 3$.

(+1) Wenn Sie Spaß daran haben, dann berechnen Sie f_{111} (mit Hilfe eines Computers!).

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Wir betrachten Worte über dem Alphabet $A = \{a, \dots, z\}$ (ohne Sonderzeichen, d.h. $|A| = 26$).

a) Wie viele (auch sinnlose) Worte mit höchstens 5 Buchstaben gibt es?

b) Wie viele dieser Worte enthalten einen beliebigen Buchstaben mindestens 3-fach?

Aufgabe 5
Die erste Reihe eines Theaters habe 15 nummerierte Plätze.

a) Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es, wenn die erste Reihe mit 15 verschiedenen Personen besetzt wird? (5 Plätze bleiben also frei, es ist aber nicht festgelegt, welche Plätze frei bleiben.)

b) Wie viele mögliche Sitzordnungen gibt es, wenn die erste Reihe mit nur 12 verschiedenen Personen besetzt wird?

Aufgabe 6
10 völlig gleichartige Murmeln sollen auf 3 Boxen (Box A, Box B und Box C) verteilt werden.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jede Box bis zu 10 Kugeln fassen kann?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn jede Box bis zu 10 Kugeln fassen kann und keine Box frei bleiben soll?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn Box A nur bis zu 5 Kugeln fassen kann, die Boxen B und C aber beliebige Kapazität haben?

Aufgabe 7 (optional)
Sei M eine endliche Menge und $f : M \to M$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wenn f surjektiv ist, dann ist f auch injektiv.
(In der Vorlesung wurde ein allgemeinerer Satz vorgestellt, aber nicht bewiesen. Diesen dürfen Sie nicht verwenden!
Hinweis: Der Beweis ist durch Induktion über $|M|$ möglich, ähnlich zum Beweis der ersten Aussage von Lemma 1.6.4 aus der Vorlesung.)

Aufgabe 8 (optional)
Zeigen Sie, dass sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $2^n \times 2^n$-Schachbrett so mit L-Stücken, die jeweils so groß sind wie drei Felder des Schachbrettes, pflastern lässt, dass nur die rechte obere Ecke frei bleibt.