Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 6

Abgabe bis 25.05.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Ein Landtag hat 111 Sitze. Drei Parteien (Partei A, B und C) sind vertreten. Jede dieser Parteien hat also mindestens einen Sitz bekommen.

a) Wie viele mögliche Sitzverteilungen gibt es?

b) Bei wie vielen Sitzverteilungen wäre Partei A nicht an der Regierung beteiligt, d.h. haben B oder C oder eine Koalition aus B und C die absolute Mehrheit?

Aufgabe 2 (5 Punkte)
7 schwarze Stühle stehen in einem Kreis auf nummerierten Positionen (d.h. die Stühle 1 und 7 stehen nebeneinander).

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es zwei der schwarzen Stühle durch weiße Stühle so zu ersetzen, daß keine zwei weißen Stühle nebeneinander stehen?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es einige der schwarzen Stühle durch weiße Stühle so zu ersetzen, daß keine zwei weißen Stühle nebeneinander stehen?

   Hinweis: Sei X_n wie in Blatt 05, Aufg. 3 definiert und

$$X_n^+ = \{x \in X_n \mid x_1 + x_n \leq 1\}.$$

   Die gesuchte Zahl von Möglichkeiten ist dann $|X_7^+|$. (Warum?)

   Setzen Sie $s_n := |X_n^+|$ und finden Sie eine geeignete (rekursive?) Formel für s_n.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Wir bezeichnen mit $\hat{S}_{n,k}$ die Anzahl der Partitionen einer n-elementigen Menge in k Mengen, so dass jede Menge mindestens 2 Elemente enthält. Berechnen Sie $\hat{S}_{2k,k}$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Diskutieren Sie die Lösungen der Hausaufgaben 2, 3 und 6 von Übungsblatt 5.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie die Stirlingzahl zweiter Art $S_{7,4}$.
Geben Sie ferner einige Partitionen der Menge $\{1, 2, \cdots, 7\}$ in 4 Teilmengen an.

b) Berechnen Sie die Stirlingzahl erster Art $s_{7,4}$.
Geben Sie ferner einige Permutationen der Menge $\{1, 2, \cdots, 7\}$ an, die aus genau 4 Zykeln bestehen.

Aufgabe 6
n Klausuren sollen für die Korrektur in k Teile aufgeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Teile möglichst gleich groß sein sollen (d.h. die Größen des größten und des kleinsten Teils sich um maximal 1 unterscheiden dürfen)?

Aufgabe 7 (optional)
Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ seien die folgenden Abbildungen gegeben

$$f : X(k, n) \to \mathcal{P}_{n-1}(\{1, \dots, k + n - 1\}),$$
$$f(k_1, \dots, k_n) := \{k_1 + 1,\ k_1 + k_2 + 2,\ \dots,\ k_1 + \cdots + k_{n-1} + (n - 1)\}$$
$$g : \mathcal{P}_{n-1}(\{1, \dots, k + n - 1\}) \to X(k, n).$$
$$g(\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}) := (a_1 - 1,\ a_2 - a_1 - 1,\ \dots,\ a_{n-1} - a_{n-2} - 1,\ k + n - 1 - a_{n-1}),$$
wobei wir $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ annehmen.

Zeigen Sie, dass

$$f \circ g = id_{\mathcal{P}_{n-1}(\{1,\dots,k+n-1\})} \text{ und}$$
$$g \circ f = id_{X(k,n)} .$$

Erinnerung: Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ und eine Menge M sind
$X(k, n) := \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid k_1 + \cdots + k_n = k\}$ und
$\mathcal{P}_k(M) := \{S \in \mathcal{P}(M) \mid |S| = k\}$.