Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 9

Abgabe bis 15.06.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Auf einer Ausstellung befinden sich 12 Gemälde. Zwei davon sind Fälschungen, 10 sind Originale. Ein Kunde taucht zusammen mit einem Experten auf, der bei Vorlage eines Gemäldes eine Einschätzung abgeben kann, ob es eine Fälschung ist oder nicht. Dieser Experte beurteilt ein ihm vorgelegtes Gemälde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ richtig, und zwar unabhängig davon, ob man ihm ein Original oder eine Fälschung vorlegt.
Der Kunde wählt zufällig ein Bild und befragt den Experten. Hält der Experte es für ein Original, so wird es von dem Kunden gekauft. Sonst wählt der Kunde zufällig ein anderes Bild und kauft dieses, ohne den Experten noch einmal zu befragen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kunde mit einem Original nach Hause geht.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Student die vorliegende Aufgabe lösen kann, sei $\frac{1}{2}$. Kann er sie erfolgreich lösen, sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die Klausur besteht, gleich $\frac{3}{4}$. Kann er sie nicht lösen, sei die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Klausur gleich $\frac{1}{4}$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann ein zufälliger gewählter Student die Klausur besteht?

b) Nach Jahren erfährt man von einem Studenten, dass er die Klausur bestanden hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit konnte er die vorliegende Aufgabe lösen?

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Für $U \subseteq \mathbb{N}$ sei $P(U) := \sum_{k \in U} \frac{1}{2^{k+1}}$. Zeigen Sie, dass P ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}$ ist.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was Sie dazu alles zeigen müssen. Sie dürfen beim Beweis ihr Wissen aus Analysis über die geometrische Reihe benutzen.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Besprechen Sie die Aufgabe 3 von Übungsblatt 8.

Aufgabe 5
Auf einer Prüfstation werden Bauteile getestet. Man weiß, dass 3% aller erzeugten Bauteile einen Fehler haben. Beim Prüfen wird bei 98% der defekten Teile der Fehler festgestellt, aber auch 1% der fehlerfreien Bauteile werden fälschlicherweise als defekt eingestuft. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht als defekt eingestuftes Bauteil wirklich fehlerfrei ist.

Aufgabe 6
Eine Urne enthält eine Kugel, von der bekannt ist, dass sie weiß oder schwarz ist. Dann wird eine weiße Kugel hinzugelegt und eine der beiden Kugeln gezogen. Sie ist weiß. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die in der Urne verbliebene Kugel ebenfalls weiß ist?

Aufgabe 7
Eine Münze wird drei mal geworfen. Wir betrachten den Ergebnisraum $\Omega := \{K, Z\}^3$ mit der Gleichverteilung P. Sei A das Ereignis, dass mindestens zweimal Kopf kommt. Sei B das Ereignis, dass beim ersten Wurf Kopf kommt. Sei $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \mid x_2 = x_3\}$ das Ereignis, dass beim zweiten und dritten Wurf die gleiche Seite der Münze oben liegt.

a) Berechnen Sie $P(A \cap B \cap C)$ und $P(A)P(B)P(C)$.

b) Ist die Familie (A, B, C) von Ereignissen unabhängig?