Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 11

Abgabe bis 29.06.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Aus einer Urne mit 4 schwarzen und 6 roten Kugeln wird zwei mal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen. Für $i = 0, 1$ sei $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ die Zufallsvariable, welche die Anzahl der schwarzen Kugeln im i-ten Zug angibt. (Es gilt also $P(X_1 = 1) = \frac{4}{10}$, $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = \frac{3}{9}$ und $P(X_2 = 1|X_1 = 0) = \frac{4}{9}$.) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{E}(X_2)$ und $\mathbb{E}(X_1X_2)$ sowie die Varianzen $\mathbb{V}(X_1)$, $\mathbb{V}(X_2)$ und $\mathbb{V}(X_1X_2)$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)
Mit einem Würfel wird 100-mal gewürfelt. Ergebnisraum ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{100}$. Sei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfes. Sei

$$M = \frac{1}{100}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100})$$

der Mittelwert dieser Zufallsvariablen. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von M.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei (Ω, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie: Wenn $X(\Omega) = \{0, 1\}$ gilt, dann ist $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(1 - X)$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
In einer Urne befinden sich 15 Kugeln. Davon sind zwei schwarz, zwei weiß und der Rest gelb. Es wird eine Kugel gezogen. Bei schwarz erhält man 8 Euro, bei weiß 4 Euro, bei gelb geht man leer aus. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Zufallsvariable, die den möglichen Gewinn beschreibt.

Aufgabe 5
Bei dem Glücksspiel „Chuck a luck"setzt der Spieler seinen Einsatz auf eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dann wird mit drei Würfeln gewürfelt. Erscheint die vom Spieler gewählte Zahl einmal, zweimal oder dreimal, so bekommt er seinen Einsatz doppelt, dreifach oder vierfach zurück. Wenn die vom Spieler gewählte Zahl nicht erscheint, dann verliert er seinen Einsatz. Berechnen Sie den Erwartungswert für die den Gewinn des Spielers beschreibende Zufallsvariable.

Aufgabe 6
Nach einem Fest torkeln n Studierende in die Betten ihres großen Schlafsaals. Obwohl jedem Studierenden bereits ein Bett zugewiesen wurde, legt sich jeder völlig willkürlich in irgendein Bett. Wir denken uns die Studierenden und die Betten nummeriert, so dass wir die Situation als Wahrscheinlichkeitsraum mit der Menge $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}^{n,\neq}$ als Ereignisraum und der Gleichverteilung als Wahrscheinlichkeitsmaß beschreiben können.
Für $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ und $\omega \in \Omega$ definieren wir durch $X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega_i = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ eine Zufallsvariable X_i, die misst, ob der i-te Studierende im richtigen Bett liegt. Somit ist $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Anzahl der Studierenden, die im richtigen Bett liegen.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

b) Berechnen Sie für $i \neq j$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X_i \cdot X_j = 1)$ und $P(X_i \cdot X_j = 0)$, sowie $P(X_i^2 = 1)$ und $P(X_i^2 = 0)$.

c) Entscheiden Sie, ob $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen ist.

d) Berechnen Sie die Varianz $\mathbb{V}(Y)$.