Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Prof. A. Bley

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen I

SoSe 2016

Übungsblatt 12

Abgabe bis 06.07.2016, 8:00
in Kasten vor Raum 2303

Hausaufgaben

Hinweis: Dies ist das **letzte** Blatt mit Hausaufgaben.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
In einem Land ihrer Vorstellung stehen Wahlen an. Es gibt N Wähler und zwei Kandidaten A und B. Durch den Einsatz riesiger, aber für A und B gleich großer Werbeetats ist die Wählerschaft so eingestimmt, dass jeder einzelne Wähler mit genau 50% Wahrscheinlichkeit für A bzw. B stimmt.
Kandidat A beschließt nun, diese etwas unsichere Situation durch Einsatz zusätzlicher Mittel in seinem Sinne zu beeinflussen. Dem Glück soll dadurch nachgeholfen werden, dass k Wähler bestochen werden, die ihm dann garantiert ihre Stimme geben. Wie groß muss k sein, damit A mit 99% Sicherheit gewinnt?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sie haben einen 6-seitigen Würfel gekauft und möchten ihn nun ausprobieren. Sie würfeln dazu n Mal und erhalten stets eine „3“. Betrachten Sie das Experiment als ein Bernoulli-Experiment, wobei „3“das erfolgreiche Ereignis und alle anderen Ergebnisse als Fehlschläge gewertet werden. Beschreiben Sie die Anzahl der „3“-er-Würfe als eine Summe von n unabhängigen Zufallsvariablen und schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit für das vorliegende Ereignis „n mal 3“mit Hilfe des schwachen Gesetzes der großen Zahlen ab. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. Welche Wahrscheinlichkeit bzw. Wahrscheinlichkeitsabschätzung erhalten Sie? Welche Werte erhalten Sie für $n = 20$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ein Versuch mit Ergebnisraum $\{0, 1\}$ (1 bedeutet Treffer und 0 Niete) und Trefferwahrscheinlichkeit p wird n mal unabhängig wiederholt. Ergebnisraum des gesamten Experiments ist also $\Omega := \{0, 1\}^n$. Sei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfes und $M = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ der Mittelwert dieser Zufallsvariablen auf Ω. Sei $\varepsilon > 0$.

a) Welche Abschätzung liefert die Ungleichung von Chebyshev für $P(|M - p| \geq \varepsilon)$?

b) Beweisen Sie, dass
$$P(|M - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$
gilt. (Hinweis: Lösen Sie zunächst a). Was ist das Maximum der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x(1 - x)$?)

c) Sei nun $n = 50$ und $p = 0.5$. Welche Abschätzung für $P(|M - p| \geq \varepsilon)$ erhält man für $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ und $\varepsilon = 0.001$ mittels der Ungleichung von Chebyshev?

d) Berechnen Sie im Fall $n = 50$, $p = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$ den exakten Wert von $P(|M - p| \geq \varepsilon)$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4
Besprechen Sie Hausaufgabe 2 von Übungsblatt 11. Ergänzende Frage:
Welche Abschätzung nach oben liefert die Ungleichung von Chebyshev für die Wahrscheinlichkeiten $P(|M - \mathbb{E}(M)| \geq t)$ für $t = 0.01$, $t = 1$ bzw. $t = 4$?

Aufgabe 5
Die Zufallsvariable X beschreibe den Ausgang eines einmaligen Wurfes mit einem (fairen) Tetraeder, dessen Seiten mit den Zahlen $1, 2, 3, 4$ beschriftet sind. Der Wertebereich von X ist also $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und $P(X = i) = \frac{1}{4}$ für $i \in \Omega$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(X)$ und die Varianz $\mathbb{V}(X)$.

b) Sei $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}(X)}$. Berechnen Sie die exakten Werte von $P(|X - \mu| \geq k\sigma)$ für $k = 1$, $k = 1.25$ und $k = 1.5$ und vergleichen Sie diese mit den Abschätzungen, die sich aus der Ungleichung von Chebyshev ergeben.

Aufgabe 6
Für die folgenden Polynome $f_i(X)$ berechne man die Nullstellen in $\mathbb{C}$ und die zugehörigen Vielfachheiten.

a) $f_1(X) = X^3 - X^2 - 8X + 12$.

b) $f_2(X) = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.