Prof. Dr. Werner Seiler
Dominik Wulf

Analysis für

UNI KASSEL VERSITÄT

Übungsblatt 13 **Elektrotechniker/Mechatroniker/Wirtschaftsingenieure** **17.07.2017**

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Existenz eines Potentials für die folgenden Vektorfelder.

(i) $V_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (2xy, x^2 + 3y^2)$

(ii) $V_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x + y, e^{x+y})$

(iii) $V_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (e^y \cos(z), x\, e^y \cos(z), -x\, e^y \sin(z))$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion $h(x, y, z) = x^2 z$ und die Fläche $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\}$ sei der Zylindermantel, der parametrisiert wird durch $(x, y, z) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi), z)$ mit $(\varphi, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.

Berechnen Sie das Flächenintegral $\int\limits_F h(x, y, z)\ \mathrm{d}A$.

Aufgabe 3

(a) Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}$ gegeben und $V(x, y) = (-x^2 y, xy^2)$.

Verifizieren Sie den Integralsatz von Green: $\int\limits_{\partial D} V(s)\ \mathrm{d}(s) = \int\limits_D \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)\ \mathrm{d}(x, y)$.

Hinweis Zur Berechnung der rechten Seite können Sie Polarkoordinaten verwenden.

(b) Sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, -1 \le z \le -(x^2 + y^2)\}$ gegeben und $V(x, y, z) = (xy^2 z, -x^2 yz, z)$.

Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß: $\int\limits_{\partial D} (V(x, y, z) \cdot \vec{n}_0(x, y, z))\ \mathrm{d}A = \int\limits_D \mathrm{div}(V)(x, y, z)\ \mathrm{d}(x, y, z)$.

Hinweis D wird nach oben begrenzt durch die Kappe $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, z = -(x^2 + y^2)\}$ und nach unten durch die Kreisscheibe $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 1, z = -1\}$.
Um die linke Seite zu berechnen, können Sie diese Flächen parametrisieren, für die Berechnung der rechten Seite können Sie Zylinderkoordinaten verwenden.

(c) Sei $F = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, y, z \ge 0\}$ gegeben und $V(x, y, z) = (xy, yz, xz)$.

Verifizieren Sie den Integralsatz von Stokes: $\int\limits_{\partial F} V(s)\ \mathrm{d}(s) = \int\limits_F (\mathrm{rot}(V)(x, y, z) \cdot \vec{n}_0(x, y, z))\ \mathrm{d}A$.

Hinweis Zur Berechnung der linken Seite können Sie den Rand ∂F durch die zwei Kurven $\gamma_1(s) = (-\cos(s), \sin(s), 0)$, $0 \le s \le \pi$ und $\gamma_2(s) = (\cos(s), 0, \sin(s))$, $0 \le s \le \pi$ parametrisieren.
Zur Berechnung der rechten Seite können Sie die folgende Parametrisierung von F verwenden:
$(x, y, z) = (\cos(\theta)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi), \sin(\theta))$ mit $(\theta, \varphi) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi]$.

Abgabetermin: Keine Abgabe.

Weitere Informationen auf http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html.