Die Schwingungsgleichung

▪ Übung: Beispiel 1: Schwingungsgleichung ohne Reibung

In[1]:=
```
DE = m y''[x] + k y[x] == 0
```

Out[1]= $k\,y(x) + m\,y''(x) = 0$

Charakteristisches Polynom

In[2]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[2]= $k + \lambda^2 m = 0$

In[3]:=
```
lösung = Solve[charpol, λ]
```

Out[3]= $\left\{\left\{\lambda \to -\frac{i\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right\}, \left\{\lambda \to \frac{i\sqrt{k}}{\sqrt{m}}\right\}\right\}$

Komplexe Lösungen

In[4]:=
```
basis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```

Out[4]= $\left\{e^{-\frac{i\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}}, e^{\frac{i\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}}\right\}$

Eine reelle Lösungsbasis erhält man mit der Eulerschen Identität Exp[i x]=Cos[x]+i Sin[x] als Realteil und Imaginärteil mit dem Argument

In[5]:=
```
arg = basis[[2, 2]] / ⅈ
```

Out[5]= $\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}$

In[6]:=
```
{Cos[arg], Sin[arg]}
```

Out[6]= $\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right), \sin\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right)\right\}$

Dies liefert auch DSolve:

In[7]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```

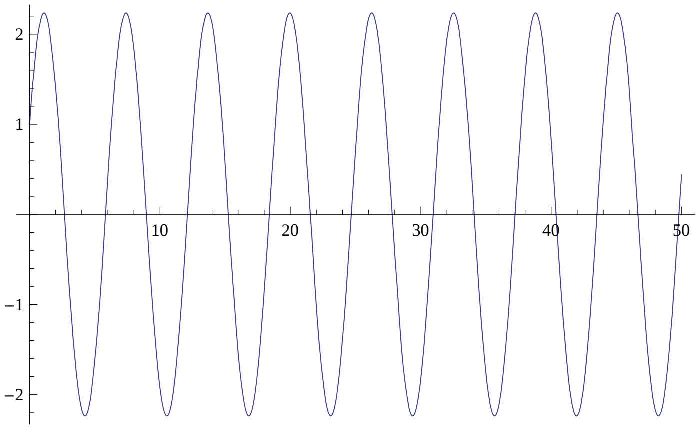
Out[7]= $\left\{\left\{y(x) \to c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right) + c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right)\right\}\right\}$

Die Konstanten ergeben sich aus einem AWP:

In[8]:=
```
sol = DSolve[{DE, y[0] == 1, y'[0] == 2}, y[x], x]
```

Out[8]= $\left\{\left\{y(x) \to \frac{2\sqrt{m}\,\sin\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right) + \sqrt{k}\,\cos\left(\frac{\sqrt{k}\,x}{\sqrt{m}}\right)}{\sqrt{k}}\right\}\right\}$

In[9]:=
```
Plot[y[x] /. sol /. {m → 1, k → 1}, {x, 0, 50}]
```

Out[9]=


Beispiel 2: Schwingungsgleichung mit Reibung

In[10]:=
```
DE = m y''[x] + R y'[x] + k y[x] == 0
```

Out[10]= $k\,y(x) + m\,y''(x) + R\,y'(x) = 0$

Charakteristisches Polynom

In[11]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[11]= $k + \lambda^2\,m + \lambda\,R = 0$

In[12]:=
```
lösung = Solve[charpol, λ]
```

Out[12]= $\left\{\left\{\lambda \to \frac{-\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R}{2\,m}\right\}, \left\{\lambda \to \frac{\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R}{2\,m}\right\}\right\}$

Wir müssen also eine Fallunterscheidung durchführen. Ist $R^2 - 4\,k\,m > 0$, so gibt es zwei (negative) reelle λ-Werte: Die Reibung ist so stark, dass kein Schwingungsverhalten mehr auftritt. Den Fall $R^2 - 4\,k\,m = 0$ nennt man den aperiodischen Grenzfall.

In[13]:=
```
basis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```

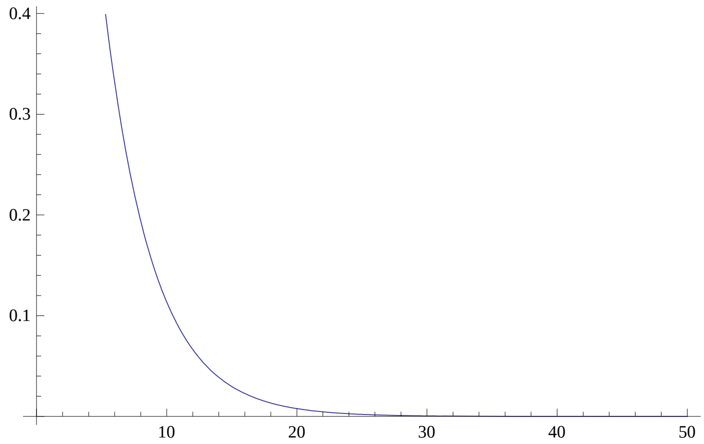
Out[13]= $\left\{e^{\frac{x\left(-\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}}, e^{\frac{x\left(\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}}\right\}$

Die Konstanten ergeben sich aus einem AWP:

In[14]:=
```
sol = DSolve[{DE, y[0] == 1, y'[0] == 2}, y[x], x]
```

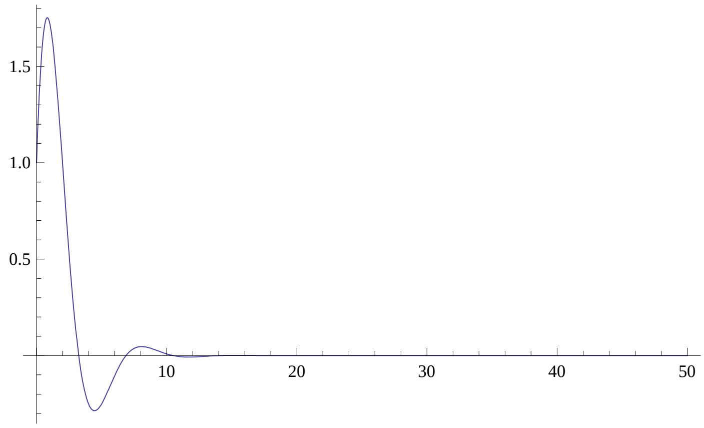
Out[14]=
$$\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{2\sqrt{R^2-4\,k\,m}}\left(-4\,m\,e^{\frac{x\left(-\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}} + 4\,m\,e^{\frac{x\left(\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}} - R\,e^{\frac{x\left(-\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}} + R\,e^{\frac{x\left(\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}} + \sqrt{R^2-4\,k\,m}\;e^{\frac{x\left(-\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}} + \sqrt{R^2-4\,k\,m}\;e^{\frac{x\left(\sqrt{R^2-4\,k\,m}-R\right)}{2\,m}}\right)\right\}\right\}$$

In[15]:= `Plot[y[x] /. sol /. {m → 1, k → 1, R → 4}, {x, 0, 50}]`

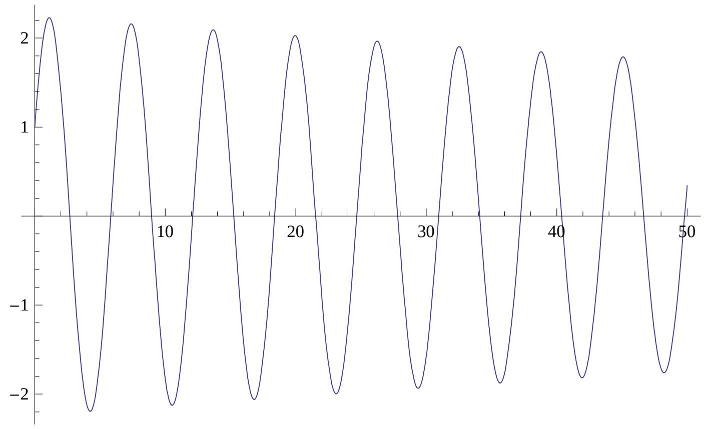
Out[15]=


Für $R^2 - 4\,k\,m < 0$ ergeben sich zwei zueinander konjugiert komplexe λ-Werte und damit als Lösung ein Produkt einer abklingenden Exponentialfunktion mit einer periodischen Funktion.

In[16]:= `Plot[y[x] /. sol /. {m → 1, k → 1, R → 1}, {x, 0, 50}, PlotRange → All]`

Out[16]=


In[17]:= `Plot[y[x] /. sol /. {m → 1, k → 1, R → 1/100}, {x, 0, 50}, PlotRange → All]`

Out[17]=


Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

- **Beispiel 1**

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[18]:=
```
DE = y''''[x] - 5 y''[x] + 4 y[x] == 0
```
Out[18]= $y^{(4)}(x) - 5\,y''(x) + 4\,y(x) == 0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[19]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```
Out[19]= $\lambda^4 - 5\,\lambda^2 + 4 == 0$

Das charakteristische Polynom hat vier verschiedene Lösungen:

In[20]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```
Out[20]= $\{\{\lambda \to -2\}, \{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to 2\}\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[21]:=
```
basis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```
Out[21]= $\{e^{-2x}, e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\}$

Dies liefert auch DSolve:

In[22]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```
Out[22]= $\{\{y(x) \to c_1\,e^{-2x} + c_2\,e^{-x} + c_3\,e^{x} + c_4\,e^{2x}\}\}$

Sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms rational, findet man diese auch mit dem Factor-Kommando:

In[23]:=
```
Map[Factor, charpol]
```
Out[23]= $(\lambda - 2)\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 1)\,(\lambda + 2) == 0$

Testen der linearen Unabhängigkeit: Wronskimatrix

In[24]:=
```
WronskiMatrix[basis_, x_] :=
  Table[D[basis[[k]], {x, j}], {j, 0, Length[basis] - 1}, {k, Length[basis]}]

WronskiDeterminante[basis_, x_] := Det[WronskiMatrix[basis, x]]
```

In[26]:=
```
WronskiMatrix[basis, x]
```
Out[26]=
$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & e^{2x} \\ -2\,e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 2\,e^{2x} \\ 4\,e^{-2x} & e^{-x} & e^{x} & 4\,e^{2x} \\ -8\,e^{-2x} & -e^{-x} & e^{x} & 8\,e^{2x} \end{pmatrix}$$

In[27]:=
```
WronskiDeterminante[basis, x]
```
Out[27]= 72

■ Lineare Unabhängigkeit im allgemeinen Fall

In[28]:=
```
basis = Table[e^(λ[k] x), {k, 4}]
```
Out[28]= $\{e^{\lambda(1)\,x}, e^{\lambda(2)\,x}, e^{\lambda(3)\,x}, e^{\lambda(4)\,x}\}$

In[29]:=
```
WronskiMatrix[basis, x]
```
Out[29]=
$$\begin{pmatrix} e^{x\,\lambda(1)} & e^{x\,\lambda(2)} & e^{x\,\lambda(3)} & e^{x\,\lambda(4)} \\ e^{x\,\lambda(1)}\,\lambda(1) & e^{x\,\lambda(2)}\,\lambda(2) & e^{x\,\lambda(3)}\,\lambda(3) & e^{x\,\lambda(4)}\,\lambda(4) \\ e^{x\,\lambda(1)}\,\lambda(1)^2 & e^{x\,\lambda(2)}\,\lambda(2)^2 & e^{x\,\lambda(3)}\,\lambda(3)^2 & e^{x\,\lambda(4)}\,\lambda(4)^2 \\ e^{x\,\lambda(1)}\,\lambda(1)^3 & e^{x\,\lambda(2)}\,\lambda(2)^3 & e^{x\,\lambda(3)}\,\lambda(3)^3 & e^{x\,\lambda(4)}\,\lambda(4)^3 \end{pmatrix}$$

In[30]:=
```
WronskiDeterminante[basis, x]
```

Out[30]=
$$\begin{aligned}
&\lambda(2)\,\lambda(3)^2\,\lambda(1)^3\left(-e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}\right)+\lambda(2)\,\lambda(4)^2\,\lambda(1)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(3)\,\lambda(4)^2\,\lambda(1)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\\
&\lambda(2)^2\,\lambda(3)\,\lambda(1)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)^2\,\lambda(4)\,\lambda(1)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(3)^2\,\lambda(4)\,\lambda(1)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\\
&\lambda(2)\,\lambda(3)^3\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)\,\lambda(4)^3\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(3)\,\lambda(4)^3\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\\
&\lambda(2)^3\,\lambda(3)\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(2)^3\,\lambda(4)\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(3)^3\,\lambda(4)\,\lambda(1)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\\
&\lambda(2)^2\,\lambda(3)^3\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(2)^2\,\lambda(4)^3\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(3)^2\,\lambda(4)^3\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\\
&\lambda(2)^3\,\lambda(3)^2\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)^3\,\lambda(4)^2\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(3)^3\,\lambda(4)^2\,\lambda(1)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\\
&\lambda(2)\,\lambda(3)^2\,\lambda(4)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)^2\,\lambda(3)\,\lambda(4)^3\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)\,\lambda(3)^3\,\lambda(4)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\\
&\lambda(2)^3\,\lambda(3)\,\lambda(4)^2\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}+\lambda(2)^2\,\lambda(3)^3\,\lambda(4)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}-\lambda(2)^3\,\lambda(3)^2\,\lambda(4)\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}
\end{aligned}$$

In[31]:=
```
WronskiDeterminante[basis, x] // Factor
```

Out[31]= $(\lambda(1)-\lambda(2))\,(\lambda(1)-\lambda(3))\,(\lambda(2)-\lambda(3))\,(\lambda(1)-\lambda(4))\,(\lambda(2)-\lambda(4))\,(\lambda(3)-\lambda(4))\,e^{\lambda(1)\,x+\lambda(2)\,x+\lambda(3)\,x+\lambda(4)\,x}$

■ Übung: Beispiel 2

In[32]:=
```
Clear[y]
```

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[33]:=
```
DE = y''''[x] - 6 y'''[x] + 3 y''[x] + 26 y'[x] - 24 y[x] == 0
```

Out[33]= $y^{(4)}(x) - 6\,y^{(3)}(x) + 3\,y''(x) + 26\,y'(x) - 24\,y(x) = 0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[34]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[34]= $\lambda^4 - 6\,\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 26\,\lambda - 24 = 0$

Das charakteristische Polynom hat vier verschiedene Lösungen:

In[35]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[35]= $\{\{\lambda \to -2\}, \{\lambda \to 1\}, \{\lambda \to 3\}, \{\lambda \to 4\}\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[36]:=
```
basis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```

Out[36]= $\{e^{-2\,x}, e^x, e^{3\,x}, e^{4\,x}\}$

Dies liefert auch DSolve:

In[37]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```

Out[37]= $\{\{y(x) \to c_1\,e^{-2\,x} + c_2\,e^x + c_3\,e^{3\,x} + c_4\,e^{4\,x}\}\}$

Sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms rational, findet man diese auch mit dem Factor-Kommando:

In[38]:=
```
Map[Factor, charpol]
```

Out[38]= $(\lambda - 4)\,(\lambda - 3)\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 2) = 0$

■ Beispiel 4.3 (a)

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[39]:=
```
DE = y'''[x] + 3 y''[x] + 3 y'[x] + y[x] == 0
```

Out[39]= $y^{(3)}(x) + 3\,y''(x) + 3\,y'(x) + y(x) = 0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[40]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[40]= $\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda + 1 = 0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[41]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[41]= $\{\{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to -1\}\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[42]:=
```
basis = {Exp[-x], x Exp[-x], x^2 Exp[-x]}
```

Out[42]= $\{e^{-x}, e^{-x} x, e^{-x} x^2\}$

DSolve liefert:

In[43]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```

Out[43]= $\{\{y(x) \to c_3 e^{-x} x^2 + c_2 e^{-x} x + c_1 e^{-x}\}\}$

■ Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[44]:=
```
DE = y''''[x] - y[x] == 0
```

Out[44]= $y^{(4)}(x) - y(x) = 0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[45]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[45]= $\lambda^4 - 1 = 0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[46]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[46]= $\{\{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to -i\}, \{\lambda \to i\}, \{\lambda \to 1\}\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[47]:=
```
komplexebasis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```

Out[47]= $\{e^{-x}, e^{-i x}, e^{i x}, e^{x}\}$

In[48]:=
```
reellebasis = Union[ComplexExpand[Re[komplexebasis]], ComplexExpand[Im[komplexebasis]]]
```

Out[48]= $\{0, e^{-x}, e^{x}, \cos(x), -\sin(x), \sin(x)\}$

DSolve liefert:

In[49]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```

Out[49]= $\{\{y(x) \to c_1 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 \sin(x) + c_2 \cos(x)\}\}$

■ Beispiel 4.3 (b)

In[50]:=
```
Clear[y]
```

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[51]:=
```
DE = y''''[x] + y[x] == 0
```

Out[51]= $y^{(4)}(x) + y(x) = 0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[52]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[52]= $\lambda^4 + 1 = 0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[53]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[53]= $\left\{\left\{\lambda \to -\sqrt[4]{-1}\right\}, \left\{\lambda \to \sqrt[4]{-1}\right\}, \left\{\lambda \to -(-1)^{3/4}\right\}, \left\{\lambda \to (-1)^{3/4}\right\}\right\}$

In[54]:=
```
lösung = MapAll[ComplexExpand, lösung]
```

Out[54]= $\left\{\left\{\lambda \to -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\lambda \to \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\lambda \to \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{\lambda \to -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[55]:=
```
komplexebasis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```
Out[55]= $\left\{e^{-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}}, e^{\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}}, e^{\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}}, e^{-\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}}\right\}$

In[56]:=
```
reellebasis = Union[ComplexExpand[Re[komplexebasis]], ComplexExpand[Im[komplexebasis]]]
```
Out[56]= $\left\{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), -e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), -e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

DSolve liefert:

In[57]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```
Out[57]= $\left\{\left\{y(x)\to c_3\, e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_4\, e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_1\, e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_2\, e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right\}$

■ Beispiel 4.3 (c)

In[58]:=
```
Clear[y]
```

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[59]:=
```
DE = y''''[x] - 4 y'''[x] + 5 y''[x] - 4 y'[x] + y[x] == 0
```
Out[59]= $y^{(4)}(x)-4\,y^{(3)}(x)+5\,y''(x)-4\,y'(x)+y(x)=0$

mit dem charakteristischen Polynom

In[60]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```
Out[60]= $\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+1=0$

In[61]:=
```
Factor[charpol]
```
Out[61]= $(\lambda^2-3\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)=0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[62]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```
Out[62]= $\left\{\left\{\lambda\to\sqrt[3]{-1}\right\}, \left\{\lambda\to-(-1)^{2/3}\right\}, \left\{\lambda\to\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right\}, \left\{\lambda\to\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$

In[63]:=
```
lösung = MapAll[ComplexExpand, lösung]
```
Out[63]= $\left\{\left\{\lambda\to\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\lambda\to\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}, \left\{\lambda\to\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}, \left\{\lambda\to\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\right\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[64]:=
```
komplexebasis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```
Out[64]= $\left\{e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}, e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)x}, e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}, e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}\right\}$

In[65]:=
```
reellebasis = Union[ComplexExpand[Re[komplexebasis]], ComplexExpand[Im[komplexebasis]]]
```
Out[65]= $\left\{0, e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}, e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}, e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right), -e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right), e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right\}$

DSolve liefert:

In[66]:=
```
DSolve[DE, y[x], x]
```
Out[66]= $\left\{\left\{y(x)\to c_3\, e^{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_4\, e^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}+c_2\, e^{x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)+c_1\, e^{x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right\}\right\}$

■ Beispiel 4.4 (a)

In[67]:=
```
Clear[y]
```

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[68]:=
```
DE = y'''[x] + 3 y''[x] + 3 y'[x] + y[x] == 0
```

Out[68]= $y^{(3)}(x) + 3\,y''(x) + 3\,y'(x) + y(x) = 0$

In[69]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[69]= $\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda + 1 = 0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[70]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[70]= $\{\{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to -1\}, \{\lambda \to -1\}\}$

mit den Anfangswerten

In[71]:=
```
AW = {y[0] == 3, y'[0] == 0, y''[0] == 2}
```

Out[71]= $\{y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2\}$

Sukzessive Lösung

In[72]:=
```
ansatz = y[x] == (A + B x + C x^2) Exp[-x]
```

Out[72]= $y(x) = e^{-x}\left(A + B\,x + C\,x^2\right)$

Einsetzen der Anfangswerte

In[73]:=
```
gleichung1 = ansatz /. {x → 0} /. {y[0] → 3}
```

Out[73]= $3 = A$

In[74]:=
```
gleichung2 = D[ansatz, x] /. {x → 0} /. {y'[0] → 0}
```

Out[74]= $0 = B - A$

In[75]:=
```
gleichung3 = D[ansatz, {x, 2}] /. {x → 0} /. {y''[0] → 2}
```

Out[75]= $2 = A - 2\,B + 2\,C$

In[76]:=
```
Solve[{gleichung1, gleichung2, gleichung3}, {A, B, C}]
```

Out[76]= $\left\{\left\{A \to 3,\ B \to 3,\ C \to \frac{5}{2}\right\}\right\}$

DSolve liefert:

In[77]:=
```
DSolve[Union[{DE}, AW], y[x], x]
```

Out[77]= $\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{2}\,e^{-x}\left(5\,x^2 + 6\,x + 6\right)\right\}\right\}$

Lösung mit Wronskimatrix:

In[78]:=
```
W = WronskiMatrix[{Exp[-x], x Exp[-x], x^2 Exp[-x]}, x]
```

Out[78]= $$\begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x}\,x & e^{-x}\,x^2 \\ -e^{-x} & e^{-x} - e^{-x}\,x & 2\,e^{-x}\,x - e^{-x}\,x^2 \\ e^{-x} & e^{-x}\,x - 2\,e^{-x} & e^{-x}\,x^2 - 4\,e^{-x}\,x + 2\,e^{-x} \end{pmatrix}$$

In[79]:=
```
W /. {x → 0}
```

Out[79]= $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

In[80]:=
```
LinearSolve[W /. {x → 0}, {3, 0, 2}]
```

Out[80]= $\left\{3, 3, \frac{5}{2}\right\}$

Beispiel 4.4 (b)

In[81]:=
```
Clear[y]
```

Wir betrachten die Differentialgleichung

In[82]:=
```
DE = y'''[x] + 3 y''[x] + 3 y'[x] + 2 y[x] == 0
```

Out[82]= $y^{(3)}(x) + 3\, y''(x) + 3\, y'(x) + 2\, y(x) = 0$

mit den Anfangswerten

In[83]:=
```
AW = {y[0] == 3, y'[0] == 0, y''[0] == 2}
```

Out[83]= $\{y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2\}$

Die Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom

In[84]:=
```
charpol = DE /. {y[x] → 1, Derivative[n_][y][x] → λ^n}
```

Out[84]= $\lambda^3 + 3\,\lambda^2 + 3\,\lambda + 2 = 0$

Das charakteristische Polynom hat die komplexen Lösungen:

In[85]:=
```
lösung = Solve[charpol]
```

Out[85]= $\left\{\{\lambda \to -2\}, \left\{\lambda \to -\sqrt[3]{-1}\right\}, \left\{\lambda \to (-1)^{2/3}\right\}\right\}$

Entsprechend erhalten wir die Lösungsbasis der Differentialgleichung DE:

In[86]:=
```
komplexebasis = Map[Exp[# x] &, λ /. lösung]
```

Out[86]= $\left\{e^{-2\,x},\ e^{-\sqrt[3]{-1}\,x},\ e^{(-1)^{2/3}\,x}\right\}$

In[87]:=
```
reellebasis = Union[ComplexExpand[Re[komplexebasis]], ComplexExpand[Im[komplexebasis]]]
```

Out[87]= $\left\{0,\ e^{-2\,x},\ e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right),\ -e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right),\ e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right\}$

In[88]:=
```
basis = {reellebasis[[2]], reellebasis[[3]], reellebasis[[5]]}
```

Out[88]= $\left\{e^{-2\,x},\ e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right),\ e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)\right\}$

Sukzessive Lösung

In[89]:=
```
ansatz = y[x] == A basis[[1]] + B basis[[2]] + C basis[[3]]
```

Out[89]= $y(x) = A\, e^{-2\,x} + B\, e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + C\, e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right)$

Einsetzen der Anfangswerte

In[90]:=
```
gleichung1 = ansatz /. {x → 0} /. {y[0] → 3}
```

Out[90]= $3 = A + B$

In[91]:=
```
gleichung2 = D[ansatz, x] /. {x → 0} /. {y'[0] → 0}
```

Out[91]= $0 = -2\,A - \frac{B}{2} + \frac{\sqrt{3}\,C}{2}$

In[92]:=
```
gleichung3 = D[ansatz, {x, 2}] /. {x → 0} /. {y''[0] → 2}
```

Out[92]=
$$2 == 4\,A - \frac{B}{2} - \frac{\sqrt{3}\,C}{2}$$

In[93]:=
```
Solve[{gleichung1, gleichung2, gleichung3}, {A, B, C}]
```

Out[93]=
$$\left\{\left\{A \to \frac{5}{3},\ B \to \frac{4}{3},\ C \to \frac{8}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

DSolve liefert:

In[94]:=
```
DSolve[Union[{DE}, AW], y[x], x]
```

Out[94]=
$$\left\{\left\{y(x) \to \frac{1}{3}\,e^{-2x}\left(8\sqrt{3}\,e^{3x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + 4\,e^{3x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) + 5\right)\right\}\right\}$$

Lösung mit Wronskimatrix:

In[95]:=
```
W = WronskiMatrix[basis, x]
```

Out[95]=
$$\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) & e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) \\ -2\,e^{-2x} & -\frac{1}{2}\,e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) - \frac{1}{2}\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) \\ 4\,e^{-2x} & \frac{1}{2}\sqrt{3}\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) - \frac{1}{2}\,e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\,e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) - \frac{1}{2}\,e^{-x/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right) \end{pmatrix}$$

In[96]:=
```
W /. {x → 0}
```

Out[96]=
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

In[97]:=
```
LinearSolve[W /. {x → 0}, {3, 0, 2}]
```

Out[97]=
$$\left\{\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$$