Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik III**
WS 2002/2003

Übungsaufgaben zu Differentialgleichungen

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der logistischen Differentialgleichung
$$y' = \alpha y - \beta y^2 \qquad (\alpha,\, \beta > 0)\,.$$
Lösen Sie das Anfangswertproblem mit
$$y(0) = P\ .$$

2. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = xy^2$, $y(x_0) = y_0$.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y' = x\,\frac{2\,y^2 - 2\,y - 4}{2\,y - 1}\ .$$

4. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' + \sin x \cdot y = \sin x$, $y(0) = 3$.

5. Bestimmen Sie die Lösung von $y\,' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

6. Lösen Sie die Differentialgleichung $y'''' - 6\,y''' + 3\,y'' + 26\,y' - 24\,y = 0$.

7. Geben Sie die allgemeine Lösung von
$$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + y = 0\ .$$

8. Geben Sie die allgemeine Lösung von $y'''' - y = 0$.

9. Lösen Sie das Anfangswertproblem
$$y''' + 3\,y'' + 3\,y' + 2\,y = 0$$
$$y(0) = 3\ ,\ y'(0) = 0\ ,\ y''(0) = 2\ .$$

10. Verwenden Sie das Grundlösungsverfahren, um die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$y'' + y = \frac{1}{\cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$
zu finden.

11. Lösen Sie mit der Faktorisierungsmethode
$$y''' - y' = e^x + e^{2x}\ .$$

12. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' = x\,\cos(2x)$$

mit dem Ansatzverfahren.

13. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 7\,y_1(x) - y_2(x) + 6\,y_3(x) \\ y_2'(x) &= -10\,y_1(x) + 4\,y_2(x) - 12\,y_3(x) \\ y_3'(x) &= -2\,y_1(x) + y_2(x) - y_3(x)\;. \end{aligned}$$

Schreiben Sie das System in der Form

$$\vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}\,(x)\;.$$

14. Lösen Sie das inhomogene Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,'(x) = A\,\vec{y}\,(x) + \vec{b}\,(x)$$

mit A wie in Aufgabe 13 und

$$\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 2 - 7\,x \\ 10\,x - 4 \\ 2\,x - 1 \end{pmatrix}\;.$$