Prof. Dr. Wolfram Koepf **Mathematik III**
WS 2002/2003

Übungsaufgaben zu Funktionentheorie

1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil $u(x, y)$ und $v(x, y)$ der Funktionen $f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ für
$$f(z) = z^3 \,, \qquad f(z) = \frac{1+z}{1-z} \qquad \text{und} \qquad f(z) = \sin z \,.$$

2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = |z|^2 = z\,\overline{z}$ nur an der Stelle $z_0 = 0$ komplex differenzierbar ist.

3. Zeigen Sie mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass
   (a) die Funktion $f(z) = e^{z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ analytisch ist,
   (b) die Funktion $f(z) = \overline{z}\, e^{z^2}$ für kein $z \in \mathbb{C}$ analytisch ist.

4. Berechnen Sie
$$\int_\Gamma z^2\, dz \qquad \text{und} \qquad \int_\Gamma \overline{z}^2\, dz$$
für $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ bzw. $\Gamma = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, wobei Γ jeweils den Ursprung mit dem Punkt $1 + i$ verbindet via
$$\begin{aligned} \Gamma_1 &: \quad z(t) = t, \quad t \in [0, 1] \,, \\ \Gamma_2 &: \quad z(t) = 1 + it, \quad t \in [0, 1] \,, \\ \Gamma_3 &: \quad z(t) = it, \quad t \in [0, 1] \,, \\ \Gamma_4 &: \quad z(t) = i + t, \quad t \in [0, 1] \,. \end{aligned}$$

5. Bestätigen Sie den Satz vom arithmetischen Mittel für $f(z) = z^2$.

6. Sei
$$I = \int\limits_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{(z-1)(z+1)(z-2i)^2}\, dz \,.$$
Zeigen Sie
$$I = a_1\, f(1) + a_2\, f(-1) + a_3\, f(2i) + a_4\, f'(2i)$$
und bestimmen Sie $a_1, \ldots, a_4$.

7. Die Funktion
$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$
besitzt um $z_0 = 0$ eine Potenzreihendarstellung
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \,.$$
Berechnen Sie $f(0) = a_0$. Wir groß ist der Konvergenzradius der Reihe?

8. Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-\sqrt{2})^k$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = \sqrt{2}$. Wir groß ist der Konvergenzradius?

9. Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{z^2-3z}$ jeweils in eine Laurentreihe um $z_0 = -1, 0, 1, 3, 2i$.

10. Geben Sie die ersten drei Terme der Laurentreihenentwicklung um den Ursprung der Funktion $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ an.

11. Bestimmen Sie das Residuum

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1+z}{z-z^3} \ .$$

12. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{2z^2+z+1}{(z^2+1)(z-2i)^2} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-2i} + \frac{D}{(z-2i)^2}$$

und daraus die Residuen

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

für $z_1 = i$, $z_2 = -i$ und $z_3 = 2i$. Welchen Wert hat das Residuum an der Stelle $z \neq z_k$?

13. Bestimmen Sie alle Residuen für $f(z) = \frac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

14. Bestimmen Sie alle Residuen für $f(z) = \frac{1}{1+z^2+z^4}$.