Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Peter Dräxler

Wintersemester 2014/15
Blatt 01
22.10.2014

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgaben 1 und 2 sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Wir betrachten die Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Sei R die Relation auf M, deren jeweilige Relationenmengen $[a] := \{b \in M | aRb\}$ wie folgt gegeben sind:

$$[1] = \{1, 3, 4\}, [2] = \{2, 5\}, [3] = \{1, 3, 4\}, [4] = \{1, 4\}, [5] = \{2, 5\}$$

Entscheiden Sie *mit Begründung*, ob R reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv ist.

b) Geben Sie eine Relation S auf M mit folgender Eigenschaft durch Auflisten der Elemente in S explizit an: S ist eine totale Ordnung.

c) Geben Sie eine Relation T auf M mit folgender Eigenschaft durch Auflisten der Elemente in T explizit an: T ist eine partielle Ordnung, die nicht total ist.

Aufgabe 2. Wir definieren eine Relation P auf $\mathbf{N}$ wie folgt: Für $x, y \in \mathbf{N}$ gilt xPy genau dann, wenn ein $a \in \mathbf{N}$ mit $x^a = y$ existiert.

a) Beweisen Sie anhand dieser Definition, dass P eine partielle Ordnung auf $\mathbf{N}$ ist.

b) Überprüfen Sie, ob P eine totale Ordnung ist.

Aufgabe 3. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren eine Relation R_f auf X durch xR_fy, falls $f(x) = f(y)$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass R_f eine Äquivalenzrelation ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Zu jeder Äquivalenzrelation R auf X gibt es eine Menge Z und eine surjektive Abbildung $g : X \to Z$, so dass $R = R_g$ gilt.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Teilmenge $\Gamma := \{x + iy : x, y \in \mathbf{Z}\}$ von $\mathbf{C}$, die als "Gitter" bezeichnet wird. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbf{R}$ ist der Absolutbetrag durch $\|z\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert. Auf dem Gitter Γ betrachten wir nun die für $z, \widetilde{z} \in \Gamma$ durch $z \equiv \widetilde{z} :\Longleftrightarrow \|z\| = \|\widetilde{z}\|$ definierte Relation. Für $z \in \Gamma$ sei wie üblich mit $[z] := \{w \in \Gamma : z \equiv w\}$ die zugehörige Äquivalenzklasse bezeichnet.

a) Überprüfen Sie, ob diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

b) Berechnen Sie die Äquivalenzklassen $[0]$, $[i]$, $[1 + i]$ und $[1 + 2i]$.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 29.10.2014 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.