Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Peter Dräxler

Wintersemester 2014/15
Blatt 04
12.11.2014

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Es sei G ein Monoid mit neutralem Element e. Ferner seien g, h invertierbare Elemente von G. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) g^{-1} ist invertierbar und es gilt $(g^{-1})^{-1} = g$.

b) hg ist invertierbar und es gilt $(hg)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$.

c) e ist invertierbar und es gilt $e^{-1} = e$.

Aufgabe 2. Geben Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 an. Gibt es Untergruppen, die keine Normalteiler sind?

Aufgabe 3. Wir betrachten für $\varphi \in \mathbf{R}$ die Drehung

$$r_\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^{i\varphi}z$$

in der komplexen Ebene um den in rad gemessenen Winkel φ und die Spiegelung

$$s_\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^{2i\varphi}\overline{z}$$

an der Achse $e^{i\varphi}\mathbf{R}$. Wie üblich bezeichnen wir dabei zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $\overline{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl.
Dass die Abbildungen r_φ und s_φ bijektiv sind, setzen wir als bekannt voraus.

a) Beweisen Sie, dass $s_\varphi^2 = Id$, $r_\psi r_\varphi = r_{\varphi+\psi}$, $r_\varphi^{-1} = r_{-\varphi}$, $s_\varphi r_\psi s_\varphi = r_{-\psi}$ und $r_\psi s_\varphi r_\psi^{-1} = s_{\varphi+\psi}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$ gilt.

   (Hinweis: Sie wissen aus anderen Vorlesungen, dass $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt, insbesondere also $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ für $x \in \mathbf{R}$.)

b) Sei nun $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Seien $\rho := r_{2\pi/n}$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$, $\sigma = s_{\pi/n}$ die Spiegelung an der Achse $e^{\pi i/n}\mathbf{R}$ und $D_n = \{\sigma^\ell \circ \rho^k : \ell \in \{0,1\}, k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\}$. Zeigen Sie, dass D_n eine Untergruppe der Gruppe $S_\mathbf{C}$ aller Bijektionen $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist.

   (Hinweis: Aus a) folgt $\rho^n = Id$, $\sigma^2 = Id$ und $\sigma\rho^k\sigma = (\rho^k)^{-1}$.)

c) Inwiefern kann man D_n als Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks auffassen?

Aufgabe 4. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie: Wenn $x \cdot x = 1_G$ für alle $x \in G$ gilt, dann ist G eine abelsche Gruppe.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 19.11.2014 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.