Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Wir betrachten die vierelementige Menge $X = \{0, i, j, k\}$ und definieren auf X eine Verknüpfung durch die folgende Verküpfungstafel:

$$\begin{array}{c|cccc} \oplus & 0 & i & j & k \\ \hline 0 & 0 & i & j & k \\ i & i & 0 & k & j \\ j & j & k & 0 & i \\ k & k & j & i & 0 \end{array}.$$

Dann ist $(X, \oplus)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0 und $U = \{0, i\}$ ist eine Untergruppe. Dies braucht nicht geprüft werden!

a) Geben Sie die Linksnebenklassen $0U$, iU, jU und kU explizit an.

b) Geben Sie X/U explizit an. Wie viele Elemente hat die Menge X/U?

Aufgabe 2. Es sei G eine Gruppe mit $|G| = 17$. Wie viele Untergruppen hat G? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 3. Es seien G und H Gruppen. Beweisen Sie, dass $G \times H$ mit der Verknüpfung $(g, h)(g', h') := (gg', hh')$ für alle $(g, h), (g', h') \in G \times H$ zu einer Gruppe wird.

Aufgabe 4. Es seien G, H Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphsimus. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $f(G)$ ist eine Untergruppe von H.

b) $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Normalteiler von G.

c) Die Abbildung $\pi : G \to G/\mathrm{Ker}(f)$ definiert durch $\pi(g) := g\mathrm{Ker}(f)$ für alle $g \in G$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

d) Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : G/\mathrm{Ker}(f) \to H$, für den $f = \bar{f}\pi$ gilt.

e) $G/\mathrm{Ker}(f) \cong f(G)$.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 26.11.2014 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.