Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgabe 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Es sei $i \in \mathbf{C}$ die imaginäre Einheit, d.h. $i^2 = -1$.
Die Relation $\equiv$ auf $\mathbf{Z}$ sei definiert durch $x \equiv y :\iff i^x = i^y$ für alle für $x, y \in \mathbf{Z}$.
Für $x \in \mathbf{Z}$ bezeichnen wir wie üblich mit $[x]$ die Äquivalenzklasse von x bezüglich $\equiv$ und mit $\mathbf{Z}/\!\equiv$ die Faktormenge $\{[x] : x \in \mathbf{Z}\}$.

a) Geben Sie die Elemente der Mengen [0], [1], [2], [3] an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Menge $\mathbf{Z}/\!\equiv$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die folgenden Verknüpfungen auf $X := \{1, 2\}$.

$+$	1	2
1	2	1
2	1	2

$\bullet$	1	2
1	1	2
2	2	2

$\cap$	1	2
1	2	2
2	2	2

$\dagger$	1	2
1	2	2
2	1	1

Entscheiden Sie, welche der Verknüpfungen $+$, $\bullet$, $\cap$ und $\dagger$ assoziativ sind.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Relation $\approx$ auf $\mathbf{R}$, die durch

$$x \approx y :\iff x - y \in \mathbf{Z} \text{ für } x, y \in \mathbf{R}$$

gegeben ist. Sei $K := \{x \in \mathbf{C} : \|x\| = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbf{C}$.

a) Beweisen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie: Für jede Zahl $x \in \mathbf{R}$ existiert genau ein $r \in \mathbf{R}$ mit $0 \leq r < 1$ und $x \approx r$.

c) Sei $F := \mathbf{R}/\approx$ die entsprechende Faktormenge. Wir definieren $f : F \to K$ wie folgt: Für jede Äquivalenzklasse $M \in F$ *wählt* man einen Repräsentanten $x \in M$ und setzt $f(M) := e^{2\pi i x}$. Beweisen Sie, dass f wohldefiniert und bijektiv ist. (Anleitung: Für "wohldefiniert" ist zweierlei zu zeigen. Erstens muss bewiesen werden, dass die Definition unabhängig von der getroffenen Repräsentantenwahl Sinn hat. Dafür zeigt man, dass für jede Äquivalenzklasse M und für jede Wahl von Repräsentanten $x_1, x_2 \in M$ schon $e^{2\pi i x_1} = e^{2\pi i x_2}$ gilt. Zweitens ist kurz zu begründen, warum der Ausdruck $e^{2\pi i x}$ wirklich in K liegt.)

Aufgabe 4. Es sei G der Monoid aller Abbildungen $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Geben Sie Elemente f und g von G an, so dass f zwar ein linksinverses Element, aber kein rechtsinverses Element in G hat, während g zwar ein rechtsinverses, aber kein linksinverses Element in G hat.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 04.11.2014 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.