Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Peter Dräxler

Wintersemester 2015/16
Blatt 04
11.11.2015

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1. Wir nummerieren die Ecken eines Tetraeders mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 und nehmen als gegeben an, dass die Menge der räumlichen Drehungen, welche den Tetraeder auf sich selbst abbilden, dadurch als Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 betrachtet werden kann. Diese Untergruppe wollen wir als A_4 bezeichnen. Sie enthält also die folgenden 12 Elemente:

- 4 Drehungen jeweils um die Achse durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche um 60 Grad.
- 4 Drehungen jeweils um die Achse durch eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seitenfläche um 120 Grad.
- 3 Drehungen jeweils um die Achse durch die Mitten zweier gegenüberliegender Kanten um 180 Grad.
- Die identische Abbildung.

Schreiben Sie diese Permuationen als Produkt elementfremder Zykel und stellen Sie damit die Gruppentafel der Gruppe A_4 auf.

Aufgabe 2. Geben Sie alle Untergruppen der Gruppe S_3 an. Gibt es Untergruppen, die keine Normalteiler sind?

Aufgabe 3. Wir betrachten für $\varphi \in \mathbf{R}$ die Drehung

$$r_\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^{i\varphi} z$$

in der komplexen Ebene um den in rad gemessenen Winkel φ und die Spiegelung

$$s_\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, z \mapsto e^{2i\varphi}\overline{z}$$

an der Achse $e^{i\varphi}\mathbf{R}$. Wie üblich bezeichnen wir dabei zu einer komplexen Zahl $z = x + iy$ mit $\overline{z} = x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl.
Dass die Abbildungen r_φ und s_φ bijektiv sind, setzen wir als bekannt voraus.

a) Beweisen Sie, dass $s_\varphi^2 = Id$, $r_\psi r_\varphi = r_{\varphi+\psi}$, $r_\varphi^{-1} = r_{-\varphi}$, $s_\varphi r_\psi s_\varphi = r_{-\psi}$ und $r_\psi s_\varphi r_\psi^{-1} = s_{\varphi+\psi}$ für alle $\varphi, \psi \in \mathbf{R}$ gilt.
(Hinweis: Sie wissen aus anderen Vorlesungen, dass $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt, insbesondere also $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$ für $x \in \mathbf{R}$.)

b) Sei nun $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Seien $\rho := r_{2\pi/n}$ die Drehung um den Winkel $2\pi/n$, $\sigma = s_{\pi/n}$ die Spiegelung an der Achse $e^{\pi i/n}\mathbf{R}$ und $D_n = \{\sigma^\ell \circ \rho^k : \ell \in \{0,1\}, k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}\}$. Zeigen Sie, dass D_n eine Untergruppe der Gruppe $S_\mathbf{C}$ aller Bijektionen $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist.
(Hinweis: Aus a) folgt $\rho^n = Id$, $\sigma^2 = Id$ und $\sigma\rho^k\sigma = (\rho^k)^{-1}$.)

c) Inwiefern kann man D_n als Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks auffassen?

Aufgabe 4. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie: Wenn $x \cdot x = 1_G$ für alle $x \in G$ gilt, dann ist G eine abelsche Gruppe.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 18.11.2015 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.