Universität Kassel
Fachbereich 10/16
Peter Dräxler

Wintersemester 2015/16
Blatt 08
09.12.2015

Übungen zur Vorlesung Diskrete Strukturen II

Aufgaben 1) und 2) sind relevant für den Scheinerwerb.

Aufgabe 1.

a) Berechnen Sie mit dem euklidischen Algorithmus $g := \mathrm{ggT}(653, 206)$ und ganze Zahlen $a, b \in \mathbf{Z}$ mit $g = 653a + 206b$.

b) Entscheiden Sie, ob $[206]_{653}$ ein inverses Element in $(\mathbf{Z}/653, \cdot)$ hat und berechnen Sie dieses gegebenenfalls.

Aufgabe 2. Geben Sie die Einheitengruppe $(\mathbf{Z}/21\mathbf{Z})^*$ des Ringes $\mathbf{Z}/21\mathbf{Z}$ durch Auflisten der Elemente explizit an.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Teilmenge $\mathbf{Q}[\sqrt{3}] := \{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$ von $\mathbf{R}$. Zeigen Sie, dass die von $\mathbf{R}$ auf $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ vererbte Addition und Multiplikation wohldefinierte Verknüpfungen auf $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ sind und $\mathbf{Q}[\sqrt{3}]$ mit diesen Verknüpfungen zu einem Körper wird.

Aufgabe 4.

a) Es sei $n \geq 5$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass n genau dann eine Primzahl ist, wenn $(n-1)! \not\equiv 0 \bmod n$ gilt.

b) Es seien $k, n \in \mathbf{N}$ natürliche Zahlen mit $k, n \geq 2$. Beweisen Sie: Ist $n^k - 1$ eine Primzahl, so ist $n = 2$ und k ist eine Primzahl.

Abgabe: Die Lösungen müssen am Mittwoch, 16.12.2015 spätestens bis 08:15 Uhr abgegeben werden.