Walter Strampp

AUFGABEN ZUR WIEDERHOLUNG

Mathematik III

1 Differenzialgleichungen erster Ordnung

Aufgabe 1.1: Richtungsfeld und Isoklinen skizzieren:
Wie lauten die Isoklinen folgender Differenzialgleichungen:

$$y' = 2\,y - 3\,x\,, \quad y' = \frac{x^2}{2} + y^2 - 3\,, \quad y' = e^{x+y}\,.$$

Man skizziere die Isoklinen und das Richtungsfeld.

Aufgabe 1.2: Allgemeine Lösung bestimmen, einige Lösungen in das Richtungsfeld zeichnen:
Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y' = \sin(x)\,.$$

Man skizziere einige Lösungen im Richtungsfeld.

Aufgabe 1.3: Allgemeine Lösung bestimmen, einige Lösungen in das Richtungsfeld zeichnen:
Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung:

$$y' = 1 - y^2\,.$$

Man skizziere einige Lösungen im Richtungsfeld.

Aufgabe 1.4: Lösung eines Anfangswertproblems bestimmen:
Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = y^2 + 1\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Man skizziere die Lösung und gebe ihren maximalen Definitionsbereich an.

Aufgabe 1.5: Allgemeine Lösung einer linearen Gleichung bestimmen:
Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen homogenen Gleichung:

$$y' = \sin(x)\, y\ .$$

Aufgabe 1.6: Anfangswertproblem bei einer linearen Gleichung lösen:

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = x\ \sin(x)\, y\ , \quad y(\pi) = 1\ .$$

(a) Man benutze die Formel zur direkten Lösung,
(b) Man bestimme zuerst die allgemeine Lösung und passe die Konstante an.

Aufgabe 1.7: Inhomogene Gleichung lösen:

Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Gleichungen:

$$y' = a\, y + b\ , \quad a\, b = konst.\ ,$$

$$y' = 2\, y + 3\, x\ .$$

Aufgabe 1.8: Anfangswertproblem bei einer inhomogenen Gleichung lösen:

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems:

$$y' = x\ \sin(x)\, y + 1\ , \quad y(\pi) = 1\ .$$

Man benutze die Formel zur direkten Lösung. (Nicht alle auftretenden Integrale können vereinfacht werden).

Aufgabe 1.9: Inhomogene Gleichung lösen:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichung:

$$y' = a\, y + \cos(x) + e^x\ , \quad a = konst.\,.$$

Aufgabe 1.10: Allgemeine Lösung einer separierbaren Gleichung bestimmen:

Man bestimme die allgemeine Lösung Gleichung:

$$y' = \frac{1 - y^2}{x}\ , \quad x > 0\ .$$

Aufgabe 1.11: Allgemeine Lösung einer separierbaren Gleichung bestimmen:

Man bestimme die allgemeine Lösung Gleichung:

$$y' = (1 + x)\,(1 + y^2)\,.$$

Aufgabe 1.12: Anfangswertproblem einer separierbaren Gleichung lösen:
Man bestimme die allgemeine Lösung Gleichung:

$$y' = -\frac{1 + y^2}{1 + x^2}\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Aufgabe 1.13: Bernoulli-Gleichung lösen:
Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Gleichung:

$$y' = -2\,y + 2\,x\,\sqrt{y}\,, \quad y > 0\,.$$

Aufgabe 1.14: Lineare Gleichung durch Potenzreihenansatz lösen:
Man löse das folgende Anfangswertproblem:

$$y' = x^2\,y\,, \quad y(0) = y_0\,,$$

Man gehe zuerst drekt vor und anschließend durch Potenzreihenansatz.

2 Systeme und Gleichungen höherer Ordnung

Aufgabe 2.1: Gleichung dritter Ordnung als System schreiben:
Man schreibe folgende Gleichung als System:

$$y''' - 3\,x\,y' + y^2 - e^{x+y} = 0\,.$$

Aufgabe 2.2: Entkoppeltes System lösen:
Man bestimme die allgemeine Lösung des Systems:

$$y_1' = 3\,y_1 - x\,, \quad y_2' = -y_1\,.$$

Aufgabe 2.3: Gleichung zweiter Ordnung auf eine Gleichung erster Ordnung zurückführen:
Man berechne die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$y'' = y' + x\,.$$

(Hinweis: $u = y'$).

Aufgabe 2.4: Fundamentalsystem aufstellen:
Man gebe jeweils ein Fundamentalsystem an:

$$y'' + y' - 3\,y = 0\,, \quad y''' + 3\,y'' - 3\,y' = 0\,, \quad y^{(4)} - y = 0\,.$$

Alle Rechnungen ohne Rechner durchführen!

Aufgabe 2.5: Fundamentalsystem aufstellen:
Man gebe ein Fundamentalsystem an:

$$y^{(5)} + 12\,y^{(4)} + 56\,y''' + 120\,y'' + 100\,y' = 0\,.$$

Zur Lösung der charakteristischen Gleichung benutze man einen Rechner.

Aufgabe 2.6: Anfangswertproblem für eine Gleichung dritter Ordnung lösen:
Man löse das Anfangswertproblem:

$$y''' - 2\,y'' + 10\,y' = 0\,, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 0\,, y''(0) = 1\,.$$

Aufgabe 2.7: System mit der Matrix-Exponentialfunktion lösen:
Man löse das System:

$$y_1' = 2\,y_1 + y_2\,, \quad y_2' = 2\,y_2\,,$$

(a) auf direktem Weg, (b) mit der Matrix-Exponentialfunktion.

3 Komplexe Analysis

Aufgabe 3.1: Real-und Imaginärteil einer Funktion bestimmen:

Man bestimme den Real-und Imaginärteil der Funktion:

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}\,, z \neq -1\,.$$

Aufgabe 3.2: Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und E-Funktion herstellen:

Mit den Potenzreihen von Sinus, Cosinus und E-Funktion zeige man:

$$\cos(z) = \frac{e^{z\,i} + e^{-z\,i}}{2}\,, \quad \sin(z) = \frac{e^{z\,i} - e^{-z\,i}}{2\,i}\,.$$

Aufgabe 3.3: Quadratwurzel veranschaulichen:

Die Quadratwurzel (Hauptzweig) wird gegeben durch:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\,e^{\frac{\arg(z)\,i}{2}}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Berechne die Bilder der Geraden $x = x_0$ und $y = y_0$ unter $w = \sqrt{z}$. Hinweis: Aus $\sqrt{x + y\,i} = u + v\,i$ folgt $x + y\,i = u^2 - v^2 + 2\,u\,v\,i$.

Aufgabe 3.4: Komplexe Potenz berechnen:

Berechne $(1+i)^{1-i}$.

Aufgabe 3.5: Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen bestätigen:

Man bestimme Real- und Imaginärteil der Cosinusfunktion $\cos(z)$ und zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt sind.

Aufgabe 3.6: Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichungen bestätigen:

Man bestimme Real-und Imaginärteil der Funktion $f(z) = \frac{1}{z}\,, z \neq 0$, und zeige, dass die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen erfüllt sind. Wie lauten die Urbilder der Koordinatenlinien $u = u_0$ und $v = v_0$.

Aufgabe 3.7: Kurvenintegral berechnen:

Man bestimme das Integral $\int_\Gamma \bar{z} dz$, wobei die Kurve Γ die Strecke darstellt $z(t) = t\,(2 + 3\,i)$, $0 \le t \le 1$.

Aufgabe 3.8: Kurvenintegral berechnen:

Man bestimme das Integral $\int_\Gamma z^2 dz$, wobei die Kurve Γ den Halbkreis darstellt $z(t) = r\ \cos(t) + r\ \sin(t)\,i$, $0 \le t \le \pi$. Man gehe erstens direkt vor und zweitens mithilfe einer Stammfunktion.

Lösungen:
(1.3) $y(x) = \pm 1$ sind konstante Lösungen.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y}\,.$$

$$x(y) = -\frac{1}{2}\,\ln(|1-y|) + \frac{1}{2}\,\ln(|1+y|) + c\,.$$

$$2\,x(y) = \ln\left(\frac{|1+y|}{|1-y|}\right) + 2\,c\,.$$

Fälle: (1) $y < -1$, (2) $-1 < y < 1$, (3) $y > 1$.
(1.4)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}\,, x(1) = 0\,.$$

$$x(y) - x(1) = \arctan(y) - \arctan(1) = \arctan(y) - \frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \arctan(y)$$

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Definitionsbereich:

$$-\frac{3\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

(1.5)

$$y(x) = c\,e^{\int \sin(x)\,dx} = c\,e^{-\cos(x)}$$

(1.6)

$$y(x) = c\,e^{\int x\,\sin(x)\,dx} = c\,e^{-x\,\cos(x)+\sin(x)}$$

$$c = e^{-\pi}$$

(1.8)

$$\tilde{a}(x) = \int\limits_{\pi}^{x} t\,\sin(t)\,dt = -x\,cos(x) + \sin(x) - \pi$$

$$y(x) = c\,e^{\tilde{a}(x)} + \int\limits_{\pi}^{x} e^{-\tilde{a}(s)}\,ds\,e^{\tilde{a}(x)}$$

(1.9) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y(x) = c\,e^{a\,x}\,.$$

Die inhomogene kann man aufspalten:

$$y'_{p,1} = a\,y_{p,1} + \cos(x)\,, \quad y'_{p,2} = a\,y_{p,1} + e^{x}\,,$$

und anschließend addieren $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,1}(x)$.

$$y_{p,1}(x) = \frac{-a}{a^2+1}\ \cos(x) + \frac{1}{a^2+1}\ \sin(x)\,,$$

$$y_{p,2}(x) = \frac{e^x}{1-a}\,, \quad a \neq 1\,,$$

$$y_{p,2}(x) = x\,e^x\,, \quad a = 1\,.$$

(1.10) $y(x) = \pm 1$ sind konstante Lösungen. (Vgl. (1.3)).

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \int \left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-y} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+y}\right)\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx\,.$$

$$-\frac{1}{2}\,\ln(|1-y|) + \frac{1}{2}\,\ln(|1+y|) = \ln(x) + c\,.$$

(1.11)

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int (1+x)\,dx\,.$$

$$\arctan(y) = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$y(x) = \tan\left(x + \frac{x^2}{2} + c\right)\,.$$

(1.12)

$$\int_1^y \frac{1}{1+s^2}\,ds = -\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt\,.$$

$$\arctan(y) - \arctan(1) = -\arctan(x) + \arctan(0)$$

$$y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(x)\right)\,.$$

(1.13)

$$u(x) = \sqrt{y(x)}$$

$$u' + u = x$$

$$u(x) = c\,e^{-x} + x - 1$$

$u(x) > 0$, vgl. Höhere Mathematik mit Mathematica 3, S. 41.

(1.14) Exakte Lösung:

$$y(x) = y_0\,e^{\frac{x^3}{3}} = y_0\,\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3\,k}}{3^k\,k!}$$

Potenzreihenansatz:

$$y_0\,(c_1 + 2\,c_2\,x + 3\,c_3\,x^2 + \cdots) = y_0\,(c_0\,x^2 + c_1\,x^3 + c_2\,x^4 + \cdots)$$

$$c_0 = y_0\,,$$

$$x^0\,:\ c_1 = 0\,,$$

$$x^1\,:\ 2\,c_2 = 0\,,$$

$$x^2 : \ 3\,c_3 = c_0\,,$$
$$x^3 : \ 4\,c_4 = c_1\,,$$
$$x^k : \ (k+1)\,c_{k+1} = c_{k-2}\,,$$

(2.1)

$$y_1' = y_2\,, y_2' = y_3\,, y_3' = 3\,x\,y_2 - y_1^2 + e^{x+y_1}$$

(2.2) Erste Gleichung lösen:

$$y_1(x) = c_1\,e^{3\,x} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$$

Integrieren:

$$y_2(x) = -\int y_1(x)\,dx + c_2$$

(2.3)

$$y'' = y' + x\,, \quad u = y' \Longrightarrow u' = u + x$$
$$u(x) = c_1\,e^x - x - 1$$
$$y(x) = \int u(x)\,dx + c_2$$

(2.4)

$$1)\lambda^2 + \lambda - 3 = 0,\,, \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$
$$y_1(x) = e^{\lambda_1\,x}\,, y_2(x) = e^{\lambda_2\,x}$$
$$2)\lambda^3 + 3\,\lambda^2 - 3\,\lambda = 0\,, \quad \lambda_1 = 0\,, \lambda_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$
$$y_1(x) = 1\,, y_2(x) = e^{\lambda_2\,x}\,, y_3(x) = e^{\lambda_3\,x}$$
$$3)\lambda^4 = 1\,, \quad \lambda_{1,2} = \pm 1\,, \lambda_{3,4} = \pm i$$
$$y_1(x) = e^x\,, y_2(x) = e^{-x}\,, y_3(x) = \cos(x)\,, y_4(x) = \sin(x)$$

(2.5)

$$\lambda^5 + 12\,\lambda^4 + 56\,\lambda^3 + 120\,\lambda^2 + 100\,\lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = -3 + i, \lambda_3 = -3 - i$$

λ_2, λ_3 jeweils zweifach.

$$y_1(x) = 1\,, \quad y_2(x) = e^{-3\,x}\,\cos(x)\,, y_3(x) = x\,e^{-3\,x}\,\cos(x)\,,$$
$$y_4(x) = e^{-3\,x}\,\sin(x)\,, y_5(x) = x\,e^{-3\,x}\,\sin(x)\,,$$

(2.6)

$$\lambda^3 - 2\,\lambda^2 + 10\,\lambda = 0$$
$$\lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 1 + 3\,i, \lambda_3 = 1 - 3\,i$$
$$y_1(x) = 1\,, \quad y_2(x) = e^x\,\cos(3\,x)\,, \quad y_3(x) = e^x\,\sin(3\,x)$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^x \cos(3x) & e^x \sin(3x) \\ 0 & e^x \cos(3x) - 3e^x \sin(3x) & 3e^x \cos(3x) + e^x \sin(3x) \\ 0 & -8e^x \cos(3x) - 6e^x \sin(3x) & 6e^x \cos(3x) - 8e^x \sin(3x) \end{pmatrix}$$

$$W(0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \frac{1}{10} y_1(x) - \frac{1}{10} y_2(x) + \frac{1}{30} y_1(x)$$

(2.7)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

vgl. Aufgaben zur Ingenieurmathematik S. 131.