

**Übungsblatt 02**

**Zur Erinnerung:**  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  und  $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ .

**Aufgabe 1**

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

(b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt:  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$ .

(c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$  gilt:  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$ .

**Aufgabe 2**

(a) Warum sind folgende Zuordnungen keine Abbildungen?

(i)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

(ii)  $f_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\frac{a}{b} \mapsto a$ .

(iii)  $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^2 - x$ .

(b) Geben Sie das Urbild von Null und das Bild der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1.$$

**Aufgabe 3**

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(a)  $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto n + 1$ .

(b)  $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $x \mapsto x^3$

(c)  $f_3 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ ,  $(n, m) \mapsto n + m$ .

**Aufgabe 4**

(a) Finden Sie Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \neq g$  und  $f \circ g = g \circ f$ .

(b) Finden Sie Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \circ g \neq g \circ f$ .

**(Bitte wenden!)**

### Aufgabe 5 (10 Punkte)

(1) Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  $1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ .

(b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt:  $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ .

(2) Seien  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Geben Sie mit Begründung an, welche der folgenden Teilmengen von  $X \times Y$  Graph bzw. kein Graph einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  sind.

(a)  $\{(1,b), (2,d), (3,a), (4,f)\}$ .

(b)  $\{(1,a), (2,b), (3,c)\}$ .

(c)  $\{(3,e), (2,a), (1,b), (3,f)\}$ .

(3) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(a)  $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad x \mapsto 2x$ .

(b)  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto |x|$ .

(c)  $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x - y$ .

---

**Abgabetermin:** Dienstag, 14.11.2017 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.

**WICHTIG:** Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese – Verwenden Sie bitte bei der Abgabe das folgende Deckblatt. Weitere Informationen auf <http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html>

## Hausaufgabe 02

Nachname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--

Gruppe:

--	--

Punkte:

--	--

---

## Hausaufgabe 02

Erzeugung des Codes

Falls Sie eines der Kästchen nicht ausfüllen können, bitte „KA“ für das jeweilige Kästchen notieren!

--	--

Erster und zweiter  
Buchstabe Ihres  
Vornamens

--	--

Tag des  
Geburtsdatums  
Ihrer Mutter

--

Erster Buchstabe  
des Vornamens  
Ihrer Großmutter  
mütterlicherseits

--	--

Zweiter und dritter  
Buchstabe Ihres  
Geburtsortes

--

Anzahl Ihrer  
älteren  
Geschwister

**Punkte:**

---