

Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt, Flächeninhalt

Dr. E. Nana Chiadjeu

U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T

06. 11. 2013

1 Winkel, Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt

2 Flächeninhalt

1 Winkel, Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt

2 Flächeninhalt

Aufgabe 1

Gegeben seien die Punkte $P = (3, -2, 3)$, $Q = (3, 2, -1)$ und $R = (-2, 3, 4)$ im \mathbb{R}^3 . Man berechne den von \vec{PQ} und \vec{PR} eingeschlossenen Winkel α Anhand

- (a) des Skalarprodukts und die Länge der Vektoren \vec{PQ} , \vec{PR} .
- (b) des Kosinussatzes
- (c) des Vektorprodukts.

Hinweis:

Kosinussatz: Für die drei Seiten a , b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel – d.h. den zwischen den Seiten a und b liegenden Winkel – γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) .$$



Aufgabe 2

Die drei Punkte $A = (2, \gamma, 24)$, $B = (1, 1, 2)$, $C = (-1, 1, -2)$ spannen im \mathbb{R}^3 ein Dreieck auf.

Wie muss man γ wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks ABC genauso groß wird, wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Seite BC ?

Aufgabe 2

Der Flächeninhalt des Dreieck ABC bzw. des Quadrats über der Seite BC ist durch die Formel $Fi_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$ bzw.

$Fi_{BC} = \|\vec{BC}\|^2$ gegeben.

(i) **Berechnung der Vektoren \vec{AB} , \vec{AC} und \vec{BC}**

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \gamma \\ -22 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 - \gamma \\ -26 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(ii) **Berechnung des Flächeninhalts des Quadrats**

$$Fi_{BC} = \|\vec{BC}\|^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 20.$$

(ii) **Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks**

$$Fi_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -26(1 - \gamma) + 22(1 - \gamma) \\ (-22)(-3) - 26 \\ -1(1 - \gamma) + 3(1 - \gamma) \end{pmatrix} \right\|$$

Aufgabe 2

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -26(1-\gamma) + 22(1-\gamma) \\ (-22)(-3) - 26 \\ -1(1-\gamma) + 3(1-\gamma) \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -4(1-\gamma) \\ 40 \\ 2(1-\gamma) \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-4(1-\gamma))^2 + 40^2 + (2(1-\gamma))^2} = \sqrt{5(1-\gamma)^2 + 400}.$$

$$\begin{aligned} F_{ABC} = F_{BC} &\iff \sqrt{5(1-\gamma)^2 + 400} = 20 \iff 5(1-\gamma)^2 + 400 = 400 \\ &\iff 5(1-\gamma)^2 = 0 \implies \gamma = 1. \end{aligned}$$