

# Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt, Flächeninhalt

Dr. E. Nana Chiadjeu

**U N I K A S S E L**  
**V E R S I T Ä T**

06. 11. 2013

1 Winkel, Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt

2 Flächeninhalt

1 Winkel, Skalarprodukt, Cosinussatz, Vektorprodukt

2 Flächeninhalt

# Aufgabe 1

Gegeben seien die Punkte  $P = (3, -2, 3)$ ,  $Q = (3, 2, -1)$  und  $R = (-2, 3, 4)$  im  $\mathbb{R}^3$ . Man berechne den von  $\vec{PQ}$  und  $\vec{PR}$  eingeschlossenen Winkel  $\alpha$  Anhand

- (a) des Skalarprodukts und die Länge der Vektoren  $\vec{PQ}$ ,  $\vec{PR}$ .
- (b) des Kosinussatzes
- (c) des Vektorprodukts.

## Hinweis:

**Kosinussatz:** Für die drei Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  eines Dreiecks sowie für den der Seite  $c$  gegenüberliegenden Winkel – d.h. den zwischen den Seiten  $a$  und  $b$  liegenden Winkel –  $\gamma$  gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) .$$

## Aufgabe 2

Die drei Punkte  $A = (2, \gamma, 24)$ ,  $B = (1, 1, 2)$ ,  $C = (-1, 1, -2)$  spannen im  $\mathbb{R}^3$  ein Dreieck auf.

Wie muss man  $\gamma$  wählen, damit der Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  genauso groß wird, wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Seite  $BC$ ?

## Aufgabe 2

Der Flächeninhalt des Dreieck  $ABC$  bzw. des Quadrats über der Seite  $BC$  ist durch die Formel  $Fi_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$  bzw.

$Fi_{BC} = \|\vec{BC}\|^2$  gegeben.

(i) **Berechnung der Vektoren  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  und  $\vec{BC}$**

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \gamma \\ -22 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 - \gamma \\ -26 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(ii) **Berechnung des Flächeninhalts des Quadrats**

$$Fi_{BC} = \|\vec{BC}\|^2 = \vec{BC} \cdot \vec{BC} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-4)^2} = 20.$$

(ii) **Berechnung des Flächeninhalts des Dreiecks**

$$Fi_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -26(1 - \gamma) + 22(1 - \gamma) \\ (-22)(-3) - 26 \\ -1(1 - \gamma) + 3(1 - \gamma) \end{pmatrix} \right\|$$

## Aufgabe 2

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -26(1-\gamma) + 22(1-\gamma) \\ (-22)(-3) - 26 \\ -1(1-\gamma) + 3(1-\gamma) \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -4(1-\gamma) \\ 40 \\ 2(1-\gamma) \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(-4(1-\gamma))^2 + 40^2 + (2(1-\gamma))^2} = \sqrt{5(1-\gamma)^2 + 400}.$$

$$\begin{aligned} F_{ABC} = F_{BC} &\iff \sqrt{5(1-\gamma)^2 + 400} = 20 \iff 5(1-\gamma)^2 + 400 = 400 \\ &\iff 5(1-\gamma)^2 = 0 \implies \gamma = 1. \end{aligned}$$