

Übungsblatt 02

Zur Erinnerung: $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ und $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Aufgabe 1

Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!}$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$.

Aufgabe 2

(a) Warum sind folgende Zuordnungen keine Abbildungen?

(i) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(ii) $f_2 : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto a$.

(iii) $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2 - x$.

(b) Geben Sie das Urbild von Null und das Bild der Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x) \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1.$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(a) $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$.

(b) $f_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$

(c) $f_3 : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $(n, m) \mapsto n + m$.

Aufgabe 4

(a) Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \neq g$ und $f \circ g = g \circ f$.

(b) Finden Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \circ g \neq g \circ f$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 5 (10 Punkte)

(1) Zeigen Sie durch vollständige Induktion folgende Aussagen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{2(k-1)}}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

(2) Seien $X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$. Geben Sie mit Begründung an, welche der folgenden Teilmengen von $X \times Y$ Graph bzw. kein Graph einer Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind.

(a) $\{(1,b), (2,d), (3,a), (4,f)\}$.

(b) $\{(1,a), (2,b), (3,c)\}$.

(c) $\{(3,e), (2,a), (1,b), (3,f)\}$.

(3) Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf *Injektivität* und *Surjektivität*.

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad x \mapsto 2x$.

(b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto |x|$.

(c) $f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x - y$.

Abgabetermin: Dienstag, 14.11.2017 um 10:00 Uhr in den Abgabefächern vor dem Raum 2303, WA.

WICHTIG: Aufgabe 5 muss sorgfältig bearbeitet und abgegeben werden. Versehen Sie Ihre Blätter vor dem Abgeben mit Namen, Matrikelnummer und Übungsgruppe und **tackern** Sie diese – Verwenden Sie bitte bei der Abgabe das folgende Deckblatt. Weitere Informationen auf <http://www.mathematik.uni-kassel.de/mathfb16/index.html>

Hausaufgabe 02

Nachname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vorname:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Studiengang:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Matr.-Nr.:

--	--	--	--	--	--	--	--

Gruppe:

--	--

Punkte:

--	--

Hausaufgabe 02

Erzeugung des Codes

Falls Sie eines der Kästchen nicht ausfüllen können, bitte „KA“ für das jeweilige Kästchen notieren!

--	--

Erster und zweiter
Buchstabe Ihres
Vornamens

--	--

Tag des
Geburtsdatums
Ihrer Mutter

--

Erster Buchstabe
des Vornamens
Ihrer Großmutter
mütterlicherseits

--	--

Zweiter und dritter
Buchstabe Ihres
Geburtsortes

--

Anzahl Ihrer
älteren
Geschwister

Punkte:
