KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11.9.2012

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sollten 27 Punkte erreicht werden.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben seien die Folgen:

$$a_n = \frac{5\,n + (-1)^n \sin(n)}{3\,n+4}\,,\; b_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^2+1}}\,,\; n \in \mathbb{N}_0\,.$$

   Berechnen Sie jeweils den Grenzwert.

   (b) Durch folgende Rekursionsformel wird eine Folge c_n, $n \in \mathbb{N}_0$, gegeben:

$$c_{n+1} = \sqrt{2\,c_n + 1}\,,\; c_0 = 2\,.$$

   Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: 1) Die Folge c_n ist streng monoton wachsend. 2) Die Folge c_n ist durch die Zahl 3 nach oben beschränkt. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge c_n.

2. (a) Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \ln(x^2+1)\,,\; x \in \mathbb{R}_{\geq 0}\,.$
   Geben Sie den Wertebereich $f(\mathbb{R}_{\geq 0})$ an.
   Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1} von f?

   (b) Gegeben sei die Funktion:

$$g(x) = 2\,x - 1 + \frac{x}{x^2-2}\,,\; x \in \mathbb{R}\,, x \neq \pm\sqrt{2}\,.$$

   Geben Sie folgende Grenzwerte an:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(g(x) - 2\,x + 1\right),$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} g(x)\,,\; \lim_{x\to\sqrt{2}^-} g(x)\,,\; \lim_{x\to-\sqrt{2}^+} g(x)\,,\; \lim_{x\to-\sqrt{2}^-} g(x)\,,$$

   und skizzieren Sie die Funktion g.

3. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}\,,\; x \in \mathbb{R}\,.$$

   (a) Welche Stellen kommen als Extremalstellen von f infrage?
   (b) Welche Stammfunktionen besitzt f?
   (c) Wie lautet das Taylorpolynom vom Grad 4 der Funktion f um den Entwicklungspunkt 0? (Hinweis: Geometrische Reihe).

   Bitte wenden!

4. Gegeben seien die Funktionen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu+1}{\nu+2}\, x^\nu \,, \;\; g(x,y) = f(x)\, e^y \,.$$

(a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $f(x)$.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 um den Entwicklungspunkt $(0,0)$ der Funktion g. (Hinweis: $e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}\, y^2 + \cdots$).

(c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{e}}(0,0)$ im Punkt $(0,0)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$. Wie muss man $\vec{e}$ wählen, damit $\frac{\partial g}{\partial \vec{e}}(0,0)$ maximal wird?

5. (a) Gegeben sei eine differenzierbare Funktion
$g:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \longrightarrow g(y_1, y_2)$,
und die Funktion
$f:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \longrightarrow f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1)$.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0\,.$$

(b) Welche Punkte kommen als Extremalstellen der Funktion
$h(x,y) = x^2 + \frac{y^3}{3} + y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4$
infrage?

6. (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.
Berechnen Sie das Integral $\int_D (x^2 + y^2)\, d(x,y)$.

(b) Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$.
Berechnen Sie das Integral $\int_D (x^2 + y^2)\, d(x,y)$.
(Hinweis: Polarkoordinaten).

Lösungen:

1.a)

$$a_n = \frac{5\,n + (-1)^n\,\sin(n)}{3\,n+4} = \frac{5 + (-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n}}{3+\frac{4}{n}}\,.$$

$$\left|(-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{\sin(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{3}\,.$$

$$b_n = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{\frac{\cos(n)}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\,.$$

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \le \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty}\frac{\cos(n)}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

Oder:

$$|b_n| \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

1.b)

1) $c_0 > 0$ und $c_n > 0$ für $n \ge 1$.
Ind. Anf. : $c_1 = \sqrt{5} > 2 = c_0\,.$
Ind. Ann. : Für ein $n \ge 0$ gelte: $c_{n+1} > c_n$.
Ind. Schluss: $c_{n+1} > c_n \implies 2\,c_{n+1} + 1 > 2\,c_n + 1$
$\implies c_{n+2} = \sqrt{2\,c_{n+1}+1} > \sqrt{2\,c_n+1} = c_{n+1}\,.$
2) Ind. Anf. : $c_0 = 2 \le 3$.($c_0 = 2 < 3$).
Ind. Ann. : Für ein $n \ge 0$ gelte: $c_n \le 3$. ($c_n < 3$).
Ind. Schluss: $c_{n+1} = \sqrt{2\,c_n+1} < \sqrt{2\cdot 3+1} = \sqrt{7} \le 3\,.$ ($\sqrt{7} < 3$).

Sei $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, dann gilt:
$c = \sqrt{2\,c+1} \implies c^2 = 2\,c+1 \iff c = 1 \pm \sqrt{2}\,.$
Der Grenzwert ist $c = 1 + \sqrt{2}$.

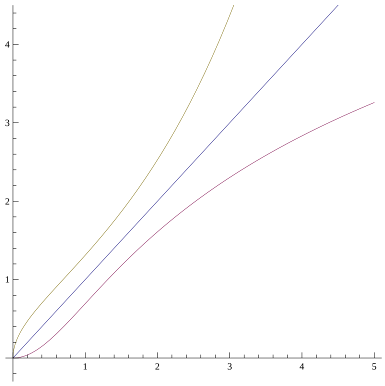
2.a)

$$x^2+1\geq 1\,,\ln(x^2+1)\geq 0\,,f(\mathbb{R}_{\geq 0})=\mathbb{R}_{\geq 0}\,.$$

$$y=\ln(x^2+1)\iff e^y=x^2+1\iff x^2=e^y-1$$

$$x=\sqrt{e^y-1}\,,y\geq 0\,,$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{e^x-1}\,,x\geq 0\,.$$



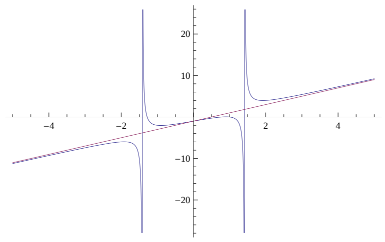
Die Funktion $f(x)=\ln(x^2+1)$
mit der Umkehrfunktion
$f^{-1}(x)=\sqrt{e^x-1}$
und der ersten Winkelhalbierenden

2.b)

$$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-2x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x^2}}=0\,.$$

Oder: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)-2x+1)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2\,x}=0\,.$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}g(x)=+\infty\,,\quad\lim_{x\to\sqrt{2}^-}g(x)=-\infty\,,\quad\lim_{x\to-\sqrt{2}^+}g(x)=+\infty\,,\quad\lim_{x\to-\sqrt{2}^-}g(x)=-\infty\,,$$



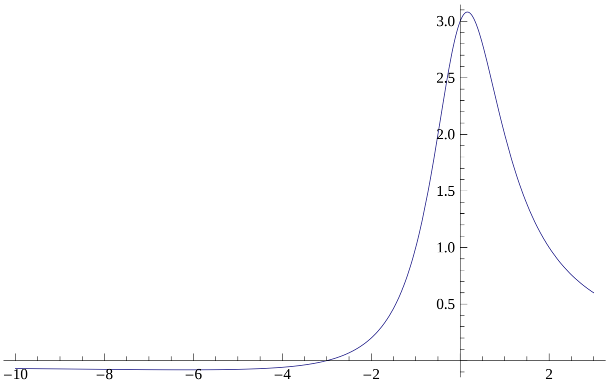
Die Funktion $g(x)=2\,x-1+\frac{x}{x^2-2}$
mit der Asymptote $y=2\,x-1$

3.a)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - (x+3)\,2\,x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 6\,x + 1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + 6\,x - 1 = 0\,.$$

$$x = -3 \pm \sqrt{10}\,.$$



Die Funktion $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$

3.b)

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,x}{x^2+1} + 3\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x^2+1) + 3\,\arctan(x) + c\,.$$

3.c)

$$f(x) = (x+3)\,\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu}\,,\ |x| < 1\,.$$

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu+1} + 3\,\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu}\,x^{2\,\nu}\,.$$

$$f(x) = (x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots) + (3 - 3\,x^2 + 3\,x^4 - 3\,x^6 + \cdots)$$

$$T_4(f, x, 0) = 3 + x - 3\,x^2 - x^3 + 3\,x^4\,.$$

4.a)

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = \frac{(\nu+2)^2}{(\nu+3)\,(\nu+1)} = \frac{\left(1+\frac{2}{\nu}\right)^2}{\left(1+\frac{3}{\nu}\right)\,\left(1+\frac{1}{\nu}\right)}$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| = 1$$

$$\rho = 1$$

4.b)

$$g(x,y) = f(x)\,e^y = \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,x+\frac{3}{4}\,x^2+\cdots\right)\,\left(1+y+\frac{1}{2}\,y^2+\cdots\right)$$

$$g(x,y) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,x+\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{4}\,x^2+\frac{2}{3}\,x\,y+\frac{1}{4}\,y^2+\cdots$$

$$T_2(g,x,y,0,0) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}\,x+\frac{1}{2}\,y+\frac{3}{4}\,x^2+\frac{2}{3}\,x\,y+\frac{1}{4}\,y^2$$

4.c)

$$\text{grad}\,g(x,y) = \left(f'(x)\,e^y,\ f(x)\,e^y\right)\,,f(0)=\frac{1}{2}\,,f'(0)=\frac{2}{3}\,,$$

$$\text{grad}\,g(0,0) = \left(\frac{2}{3},\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial\vec{e}}(0,0) = \frac{2}{3}\,e_1+\frac{1}{2}\,e_2$$

$$\vec{e}_m = \frac{1}{||\text{grad}\,g(0,0)||}\,\text{grad}\,g(0,0) = \frac{6}{5}\,\text{grad}\,g(0,0) = \left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$$

5.a) $f^1(x_1, x_2) = x_1 - x_2\,,\, f^2(x_1, x_2) = x_2 - x_1\,,$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_1,x_2))\,\frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_1,x_2))\,\frac{\partial f^2}{\partial x_1}(x_1,x_2)\\ &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_1,x_2)) - \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_1,x_2))\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_1,x_2))\,\frac{\partial f^1}{\partial x_2}(x_1,x_2) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_1,x_2))\,\frac{\partial f^2}{\partial x_2}(x_1,x_2)\\ &= -\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_1,x_2)) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_1,x_2))\,,\end{aligned}$$

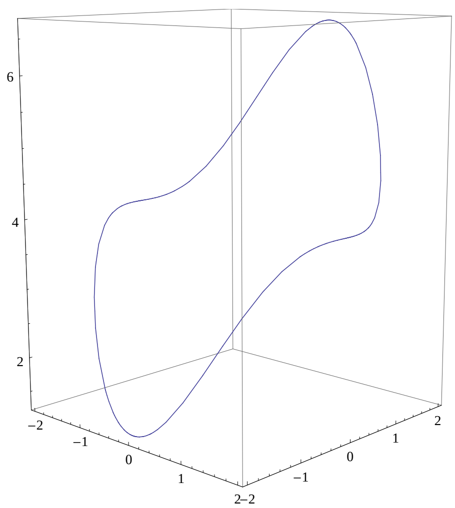
$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_1}(x_1,x_2) + \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 0\,.$$

5.b) grad $h(x,y) + \lambda$ grad $(x^2+y^2) = (2\,x, y^2+2\,y) + \lambda\,(2\,x, 2\,y) = (0,0)\,,$

$$2\,x + \lambda\,2\,x = 0\,,\; y^2 + 2\,y + \lambda\,2\,y = 0\,.$$

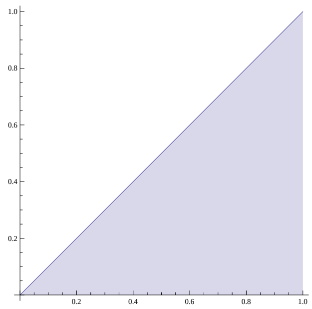
$$x\,(1+\lambda) = 0\,,\; y^2 + 2\,y\,(1+\lambda) = 0\,.$$

1) $1+\lambda \neq 0 : x = 0$ und $y = \pm 2$, $\lambda = -\dfrac{y}{2} - 1 = -3$. Also: $(0,2)\,,\;(0,-2)$.
2) $1+\lambda = 0 : y = 0$ und $x = \pm 2$. Also: $(2,0)\,,\;(-2,0)$.



Die Funktion $h(x,y)$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2=4$

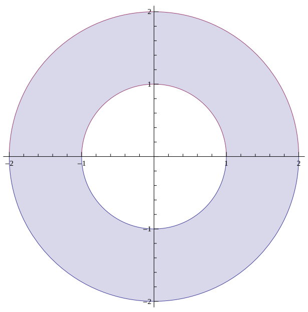
6.a)



Das Dreieck
$D = \{(x, y) \,|\, 0 \le x \le 1\,, 0 \le y \le x\}$

$$\begin{aligned}\int_D (x^2 + y^2)\, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^2\, y + \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \frac{4}{3}\, x^3\, dx = \left(\frac{1}{3}\, x^4 \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

6.b)



Der Kreisring
$D = \{(x, y) \,|\, x = r\, \cos(\phi)\,, y = r\, \sin(\phi)\,,$
$1 \le r \le 2\,, 0 \le \phi \le 2\,\pi\}\,.$

$$\begin{aligned}\int_D (x^2 + y^2)\, d(x, y) &= \int_0^{2\,\pi} \left(\int_1^2 r^2\, r\, dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{2\,\pi} \left(\frac{1}{4}\, r^4 \right)_{r=1}^{r=2} d\phi = \int_0^{2\,\pi} \frac{15}{4}\, d\phi \\ &= \frac{15}{2}\, \pi\,.\end{aligned}$$