KLAUSUR

Analysis (E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

13.03.2012

(Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:	Studiengang:	Versuch Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 27 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Gegeben sei die Folge definiert durch $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 1$.
   - (i) Man zeige durch vollständige Induktion, dass a_n streng monoton steigend ist.
   - (ii) Die Folge (a_n) ist beschränkt (dies muss nicht bewiesen werden). Man berechne den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$

   (b) Man berechne den Grenzwert der Folge

$$u_n = \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot e^{\frac{n+xn^2}{n^2}} \ .$$

   (c) Man berechne die Summe aller ganzzahligen Vielfachen von 13, die zwischen 1 und 1000 liegen.

2. (a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x} \ .$$

   - (i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.
   - (ii) Man skizziere f im Intervall $[-2, 6]$.

   (b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = x^2 + x - 2 \ .$$

   Man finde 2 Teilmengen D_1 und D_2 von $\mathbb{R}$, in denen g umkehrbar ist, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.

   (c) Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx \ .$$

   Hinweis: Man substituiere $t = \sqrt{x+1}$ und nutze partielle Integration.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{(1 + x^2)(1 - 2x)} \ .$$

   (a) Partialbruchzerlegung:
   Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

   $$f(x) = \frac{a}{1 - 2x} + \frac{bx + c}{1 + x^2}$$

   schreiben lässt.

   (b) Gegeben sei die Funktion

   $$h(x) = \frac{2x - 1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 - 2x} \ .$$

   Man finde $\int h(x) dx$.

   (c) Man löse die Gleichung

   $$u^{2x-1} = v^{x+2}, \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0})$$

   nach x auf. Man vereinfache soweit wie möglich dann die spezielle Lösung für $u = 100$ und $v = 10$.

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1 + y^2} \ .$$

   (a) Man zeige, dass die Höhenlinien von f Hyperbeln sind.

   (b) Man benutze die geometrische Reihe, um das Taylorpolynom $T_{10}(f, (x; y), (0; 0))$ zehnten Grades der Funktion f zu bestimmen.

   (c) (i) Man berechne den Gradienten von f.
   (ii) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?
   (iii) In welche Richtung muss man im Punkt $P = (1, 1)$ ableiten, damit die Richtungsableitung Null ergibt?

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y), \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] .$$

   Man berechne

   (a) den Gradienten von f und leite hieraus die kritischen Punkte her.

   (b) die Hesse-Matrix und entscheide für jeden kritischen Punkt, ob eine Minimalstelle, Maximalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt.

6. Das Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ liegt im ersten Quadranten und wird von dem Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ und den Geraden $y = 0$ und $y = x$ begrenzt.

   Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$G = \{(x,y,z) | \quad (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

   (a) Man zeichne eine Skizze von D und berechne mit Hilfe von Polarkoordinaten das Integral

$$\int_D (x+y)d(x,y) .$$

   (b) Man zeichne eine Skizze von G und berechne mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das Integral

$$\int_G z^2(x+y)d(x,y,z) .$$

Lösungen

1. (a)

   (i) Vollständige Induktion: $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 1$.
   Induktionsanfang: $n = 1$

   $$a_1 = \sqrt{a_0 + 6} = \sqrt{1+6} = \sqrt{7} > 1 \quad \text{d.h.} \quad a_1 > a_0 \ .$$

   Induktionsannahme: $a_n > a_{n-1}$

   Induktionsschluss: (Zu zeigen: $a_{n+1} > a_n$**)**
   Aus der Induktionsannahme folgt:

   $$a_n > a_{n-1} \Longleftrightarrow a_n + 6 > a_{n-1} + 6 \Longrightarrow \sqrt{a_n + 6} > \sqrt{a_{n-1} + 6} \Longleftrightarrow a_{n+1} > a_n$$

   (ii) Grenzwert: Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert:

   $$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 6} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 6}$$

   $$\Longleftrightarrow a = \sqrt{a+6} \Longleftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Longleftrightarrow a = 3 \quad \text{oder} \quad a = -2 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3$$

   da a_n eine positive Folge ist.

(b) $u_n = \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot e^{\frac{n+xn^2}{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x^3}{n^3}\right)^{n^3} \cdot \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+xn^2}{n^2}} = e^{x^3} \cdot e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+xn^2}{n^2}\right)} = e^{x^3} \cdot e^x = e^{x^3+x}$$

(c) Man berechne die Summe aller ganzzahligen Vielfachen von 13, die zwischen 1 und 1000 liegen.
Sei S diese Summe

$$S = 13 + 26 + 39 + \cdots + 988 = 13(1 + 2 + 3 + \cdots + 76)$$
$$= 13 \sum_{k=1}^{76} k = 13 \cdot \frac{76(76+1)}{2} = 38038 \ .$$

2. (a) $f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-\frac{1}{2}x}$

(i) Man bestimme die Extremalstellen sowie die Monotonie-Intervalle von f.

Extremalstelle

$$f'(x) = (2x + 1 - \frac{1}{2}(x^2 + x - 2))e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{2}(x+1)(x-4)e^{-\frac{1}{2}x} \ .$$

Extremalstellen an $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$.

Monotonie-Intervalle:
f ist monoton steigend für alle $x \in [-1, 4]$ da $f'(x) \geq 0$ auf dem Intervall und f ist monoton fallend für alle $x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$ da $f'(x) < 0$ auf dem Intervall.

(ii) Skizze von f im Intervall $[-1, 6]$ hier.

(b) $g(x) = x^2 + x - 2$.
Man finde 2 Teilmengen D_1 und D_2 von $\mathbb{R}$, in denen g umkehrbar ist, und gebe jeweils die Umkehrfunktion an.

$$g(x) = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Der Scheitel von g ist $S = (-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4})$. Daraus folgt, dass $D_1 = (-\infty, -\frac{1}{2})$ und $D_2 = (-\frac{1}{2}, \infty)$.

Berechnung der jeweilige Umkehrfunktion.

$$y = x^2 + x - 2 \Longrightarrow x^2 + x - 2 - y = 0 \Longrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - y - \frac{9}{4} = 0 \Longrightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{y + \frac{9}{4}} \ , \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{y + \frac{9}{4}} \ .$$

Da D_1 ein negatives Intervall ist, haben wir

$$g^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{9}{4}} \quad \text{auf} \quad D_1 \quad \text{und} \quad g^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}} \quad \text{auf} \quad D_2 \ .$$

Bild von g^{-1} hier
(c) Man berechne das unbestimmte Integral

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx \ .$$

$$t = \sqrt{x+1} \Longrightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \Longrightarrow dx = 2\sqrt{x+1}dt = 2tdt \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt$$

Partielle Integration:

$$u = 2t \Longrightarrow u' = 2, \quad v' = e^t \Longrightarrow v = e^t \ .$$

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = \int 2te^t dt = 2te^t - \int 2e^t = 2te^t - 2e^t \ .$$

Mit Rücksubstitution erhalten wir

$$\int e^{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1}e^{\sqrt{x+1}} - 2e^{\sqrt{x+1}} = 2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1} - 1) \ .$$

3. (a)

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 4x}{(1+x^2)(1-2x)} \ .$$

Partialbruchzerlegung:
Man bestimme reelle Zahlen a, b und c, so dass $f(x)$ sich in der Form

$$f(x) = \frac{a}{1-2x} + \frac{bx + c}{1+x^2}$$

schreiben lässt.

$$f(x) = \frac{a(1+x^2) + (1-2x)(bx+c)}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{(a-2b)x^2 + (b-2c)x + a + c}{(1-2x)(1+x^2)}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a - 2b = -3, \quad b - 2c = 4 \quad a + c = 0 \Longrightarrow a = 1, b = 2, c = -1 \ .$$

somit

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{2x-1}{1+x^2}$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$h(x) = \frac{2x-1}{1+x^2} + \frac{1}{1-2x} .$$

Man finde $\int h(x)dx$.

$$\int h(x)dx = \int \frac{2x-1}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1-2x}dx$$

$$= \int \frac{2x}{1+x^2}dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx - \left(-\frac{1}{2}\int \frac{-2}{1-2x}\right)dx$$

$$= \ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{1}{2}\ln|1-2x| .$$

(c) Man löse die Gleichung

$$u^{2x-1} = v^{x+2}, \quad (u, v \in \mathbb{R}_{>0})$$

nach x auf. Man bestimme dann die spezielle Lösung für $u = 100$ und $v = 10$.

$$u^{2x-1} = v^{x+2} \Longrightarrow \ln\left(u^{2x-1}\right) = \ln\left(v^{x+2}\right) \Longrightarrow (2x-1)\ln(u) = (x+2)\ln(v)$$

$$x(2\ln(u) - \ln(v)) = 2\ln(v) + \ln(u) \Longrightarrow x = \frac{2\ln(v)+\ln(u)}{2\ln(u)-\ln(v)} .$$

Spezielle Lösung: $u = 100, v = 10$:

$$x = \frac{2\ln(10)+\ln(100)}{2\ln(100)-\ln(10)} = \frac{2\ln(10)+\ln(10^2)}{2\ln(10^2)-\ln(10)} = \frac{2\ln(10)+2\ln(10)}{4\ln(10)-\ln(10)} = \frac{4\ln(10)}{3\ln(10)} = \frac{4}{3} .$$

4. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2} .$$

(a) Man zeige, dass die Höhenlinien von f Hyperbeln sind.

$$f(x, y) = c \Longrightarrow \frac{x^2}{1+y^2} = c \Longrightarrow x^2 = c(1+y^2) \Longrightarrow x^2 - cy^2 = c$$

Kurve der Hyperbeln hier.

(b) Man benutze die geometrische Reihe, um das Taylorpolynom $T_{10}(f,(x;y),(0;0))$ zehnten Grades der Funktion f zu bestimmen.

$$\frac{x^2}{1+y^2} = x^2\frac{1}{1+y^2} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}(-y)^{2k} = x^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k}$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = x^2 - x^2y^2 + x^2y^4 - x^2y^6 + x^2y^8\ .$$

(c)

(i) Man berechne den Gradienten von f.

$$\operatorname{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+y^2} \\ \frac{-2x^2y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}\ .$$

(ii) In welche Richtung muss man ableiten, damit die Richtungsableitung ein Minimum annimmt?
in der Richtung

$$\vec{e} = -\frac{\operatorname{grad}(f)}{||\operatorname{grad}(f)||} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2x}{1+y^2}\right)^2 + \left(\frac{-2x^2y}{(1+y^2)^2}\right)^2}}\begin{pmatrix} \frac{2x}{1+y^2} \\ \frac{-2x^2y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

(iii) In welche Richtung muss man im Punkt $P = (1;1)$ ableiten, damit die Richtungsableitung Null ergibt?

$$\operatorname{grad}(f)_P = \operatorname{grad}(f)_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Sei $\vec{e}_1$ die gesuchte Richtung:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1} = \operatorname{grad}(f)_P \cdot \vec{e}_1 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{grad}(f)_P \perp \vec{e}_1 \Longrightarrow \vec{e}_1 = \pm\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

5. Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y), \quad x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ .$$

Man berechne

(a) den Gradienten von f und leite hieraus die kritischen Punkte her. **Gradient von** f

$$\operatorname{grad}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Kritische Punkte von f

$$\operatorname{grad}(f(x,y)) = \vec{0} \iff \cos(x)\sin(y) = 0(1) \quad \text{und} \quad \sin(x)\cos(y) = 0(2)\ .$$

$$(1) : \cos(x)\sin(y) = 0 \iff \cos(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(y) = 0$$
$$\iff x = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad y = 0\ .$$
$$(2) : \sin(x)\cos(y) = 0 \iff \sin(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(y) = 0$$
$$\iff x = 0 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad y = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Daraus folgt, dass die kritischen Punkte (x, y) sind

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \quad (0,0)\ .$$

(b) **Hesse-Matrix**

$$H = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix}$$

Entscheidung ob eine Minimalstelle, Maximalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt.

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : H_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(H_1) = 1 > 0$$

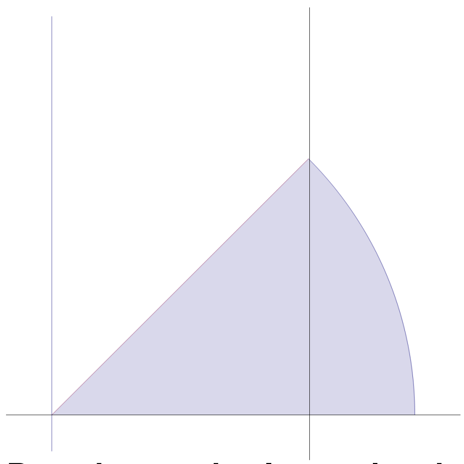
Da $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} = -1 < 0$, es liegt eine Maximalstelle an $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ genauso wie bei $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.
Minimalstelle an $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ sowie bei $\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, und Sattelpunkt bei $(0,0)$.

6. Das Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ liegt im ersten Quadranten und wird von dem Kreis $x^2 + y^2 = R^2$ und den Geraden $y = 0$ und $y = x$ begrenzt.

Das Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ wird gegeben durch

$$G = \{(x, y, z)| \quad (x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

(a)



Skizze von D

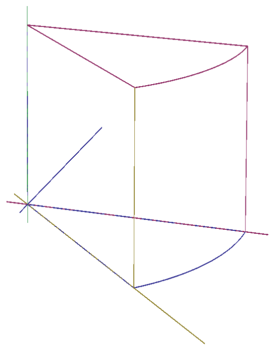
Berechnung des Integrals mit Polarkoordinaten:

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$

$$\int_D (x+y)d(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^R (r\cos(\theta) + r\sin(\theta)) r \, dr \right) d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^R (\cos(\theta) + \sin(\theta)) r^2 dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^R d\theta$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(\theta) + \sin(\theta) d\theta = \frac{R^3}{3} \left. (\sin(\theta) - \cos(\theta)) \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{R^3}{3} \, .$$

(b)  Skizze von G

Berechnung des Integrals mit Zylinderkoordinaten:

$$x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), z = z;$$

$$\int\limits_G z^2(x+y)d(x,y,z) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^1 (r\cos(\phi) + r\sin(\phi))rz^2dz = \right) dr\right) d\phi\ .$$

$$= \frac{R^3}{3}\int\limits_0^1 z^2 dz = \frac{R^3}{3}\frac{z^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{R^3}{9}\ .$$