KLAUSUR

Analysis
(E-Techniker/Mechatroniker/W-Ingenieure)

11.3.2013

(W. Strampp)

Name:	Vorname:	Matr.-Nr./Studiengang:	Versuch-Nr.:

Unterschrift:

Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Zum Bestehen der Klausur sind 27 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)	6)

Punkte:	Note:

Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
Beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter.
Geben Sie alle Rechenschritte an!

1. (a) Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen:

$$a_n = \frac{n\,\sin(n)\,\cos(n)}{n^2+1}\,,\; b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = 3 - \frac{2\,n+3}{2^n}\,.$$

2. Gegeben sei die Funktion: $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$.

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion erklärt?
Zeigen Sie, dass f in den Intervallen $(0, \frac{1}{e})$ und $(\frac{1}{e}, \infty)$ streng monoton wachsend ist.
(b) Geben Sie folgende Grenzwerte an:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)\,,\; \lim_{x\to\infty} f(x)\,,\; \lim_{x\to \frac{1}{e}^+} f(x)\,,\; \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x)\,,$$

und skizzieren Sie die Funktion f.
(c) Berechnen Sie jedem Monotonie-Intervall die Umkehrfunktion von f.
(Hinweis: $x = e^t$).

3. (a) Berechnen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln\left(e^x-1\right)}\,.$$

(b) Wie lautet das Taylorpolynom vom Grad 5 um den Punkt $x_0 = 0$ der Funktion: $f(x) = \dfrac{x}{x^2-2} + 2\,x$. (Hinweis: Geometrische Reihe).

(c) Berechnen Sie das Integral: $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx$.
(Hinweis: $\sqrt{x} = t$ substituieren).

Bitte wenden!

4. Gegeben sei die Funktion:

$$f(x,y) = x^2 - x\,y + x - y^3\,.$$

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,1)$ im Punkt $(1,1)$ in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$.
Wie muss man $\vec{e}$ wählen, damit $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,1)$ maximal wird?
Für welche $\vec{e}$ gilt $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,1) = 0$?

(b) Bestimmen Sie die Extremalstellen der Funktion f.

5. Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f\,:\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, s \longrightarrow f(s)\,.$

(a) Zeigen Sie, dass für die Funktion $g\,:\,\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,
$g(x,y) = -(x+y)\,f(y^2 - x^2)$ gilt:

$$y\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = g(x,y)\,.$$

(b) Wie lautet das Taylorpolynom der Funktion g vom Grad 4 um den Nullpunkt, wenn f die Taylorentwicklung $f(s) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, s^\nu$ besitzt?

6. (a) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$
$D = \{(x,y)\,|\,0 \le y\ \le 1\,,\,(y-1)^2 \le x \le \frac{1}{2}\,(y-1)^2 + \frac{1}{2}\}\,.$
Berechnen Sie das Integral $\int_D y\,d(x,y)$.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$
$D = \{(x,y,z)\,|\,1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\,,\,x \ge 0\,,y \ge 0\,,\,0 \le z \le 1\}.$
Berechnen Sie das Integral $\int_D y\,d(x,y,z)$.
(Hinweis: Zylinderkoordinaten).

Lösungen:

1.a)

$$|a_n| = \left|\frac{n\,\sin(n)\,\cos(n)}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1}\,.$$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0\,. \quad \textbf{2P}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,.$$

Oder:

$$b_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\,\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^2} \implies \lim_{n\to\infty} b_n = 0\,. \quad \textbf{3P}$$

1.b)

Ind. Anf. : $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{1} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = \frac{1}{2}\,,\ 3 - \frac{2\cdot 1+3}{2^1} = \frac{1}{2}\,.$ **1P**

Ind. Ann. : Für ein $n \ge 1$ gelte: $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} = 3 - \frac{2\,n+3}{2^n}$. **1P**

Ind. Schluss:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2\,\nu-1}{2^\nu} + \frac{2\,(n+1)-1}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2\,n+3}{2^n} + \frac{2\,(n+1)-1}{2^{n+1}} \\ &= 3 - \frac{2\,(2\,n+3) - 2\,(n+1)+1}{2^{n+1}} = 3 - \frac{2\,(n+1)+3}{2^{n+1}}\,. \quad \textbf{3P}\end{aligned}$$

2.a) $\ln(x)$ erklärt für $x > 0$. $\ln(x) + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$.
f ist erklärt für $x > 0, x \neq \frac{1}{e}$. **1P**

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,(\ln(x)+1) - \ln(x)\,\frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x)+1)^2}\,. \quad \textbf{1P}$$

$f'(x) > 0$, also f streng monoton wachsend. **1P**

2.b)

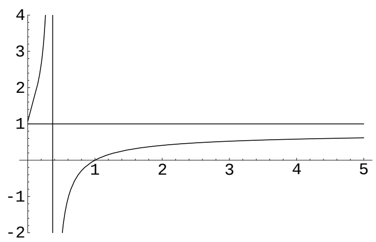
$$\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{\ln(x)}} \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = 1\,. \quad \textbf{2P}$$

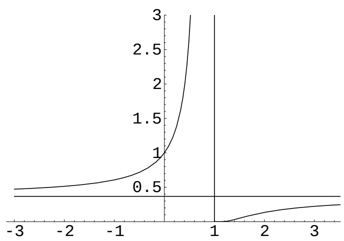
Oder:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\,,\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1\,,$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^+} \frac{1}{\ln(x)+1} = +\infty\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^-} \frac{1}{\ln(x)+1} = -\infty\,,$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = -\infty\,,\ \lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = +\infty\,, \quad \textbf{2P}$$





Die Funktion $f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+1}$ (links) und die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}$ (rechts)

2.c) $x = e^t, t \neq -1$:

$$f(x) = y \iff \frac{t}{t+1} = y \iff t = \frac{y}{1-y} \iff x = e^{\frac{y}{1-y}}$$

$x \longleftrightarrow y$:

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}\,, x > 1\,. \quad \textbf{3P}$$

(Erstes Monotonie-Intervall).

$$f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{1-x}}\,, x < 1\,.$$

(Zweites Monotonie-Intervall).

3.a)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln\left(e^x-1\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x\,e^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{e^x+x\,e^x} = 1\,. \quad \textbf{3P}$$

3.b)

$$f(x) = \frac{x}{x^2-2} + 2\,x = 2\,x - \frac{1}{2}\,x\,\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} \quad \textbf{1P}$$

$$f(x) = 2\,x - \frac{1}{2}\,x \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\nu} = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{4}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^5 - \cdots \quad \textbf{1P}$$

$$T_5(f,x,0) = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{4}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^5\,. \quad \textbf{1P}$$

3.c) $\sqrt{x} = t\,, x = t^2$

$$\int_0^4 \frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{4-t}\,2\,t\,dt \quad \textbf{2P}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{4-t}\,2\,t\,dt = \int_0^2 \left(\frac{-8+2\,t}{4-t} + \frac{8}{4-t}\right)\,dt \quad \textbf{1P}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{4-\sqrt{x}}\,dx = \left(-2\,t - 8\,\ln(4-t)\right)\big|_0^2 = -4-8\,\ln(2)+8\,\ln(4) = -4+8\,\ln(2)\,. \quad \textbf{1P}$$

4.a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\,x - y + 1\,, \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2\,, \quad \mathbf{1P}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x - 3\,y^2\,, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4\,, \quad \mathbf{1P}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(1,1) = 2\,e_1 - 4\,e_2\,. \quad \mathbf{1P}$$

$$\vec{e}_m = \frac{1}{||\text{grad}\, f(1,1)||}\,\text{grad}\, f(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,(2,-4) \quad \mathbf{1P}$$

Richtungen senkrecht zu grad $f(1,1)$: $\vec{e}_0 = \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\,(4,2)\,.$ **1P**

4.b) Kritische Punkte:

$$\text{grad} f(x,y) = (2\,x - y + 1\,, -x - 3\,y^2) = (0,0) \quad \mathbf{1P}$$

$$x = -3\,y^2$$

$$-6\,y^2 - y + 1 = 0 \implies y = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}\,. \quad \mathbf{1P}$$

$$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)\,,\,\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad \mathbf{1P}$$

Hesse-Matrix:

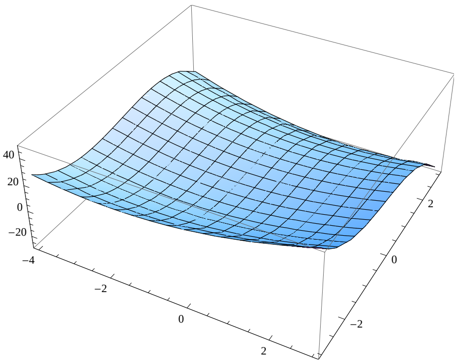
$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -6\,y \end{pmatrix} \quad \mathbf{1P}$$

$$\det H\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) = 4\,, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right) = 2$$

Minimalstelle.

$$\det H\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -2$$

Sattelpunkt. **1P**



Die Funktion $f(x, y)$

5.a)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -f(y^2-x^2) - (x+y)\,\frac{df}{ds}(y^2-x^2)\,(-2\,x) \quad \textbf{2P}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -f(y^2-x^2) - (x+y)\,\frac{df}{ds}(y^2-x^2)\,2\,y \quad \textbf{2P}$$

$$\begin{aligned} y\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -y\,f(y^2-x^2) - x\,f(y^2-x^2) \\ &= -(x+y)\,f(y^2-x^2) = g(x,y)\,. \quad \textbf{1P} \end{aligned}$$

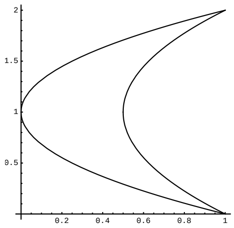
5.b)

$$g(x,y) = -(x+y)\,(a_0 + a_1\,(y^2-x^2) + a_2\,(y^2-x^2)^2 + a_3\,(y^2-x^2)^3 + \cdots) \quad \textbf{3P}$$

Terme der Ordnung ≤ 4:

$$\begin{aligned} T_4(g,(x,y),(0,0)) &= -(x+y)\,(a_0 + a_1\,(y^2-x^2)) \\ &= -a_0\,x - a_0\,y - a_1\,x^3 - a_1\,x\,y^2 + a_1\,x^2\,y - a_1\,y^3\,. \quad \textbf{2P} \end{aligned}$$

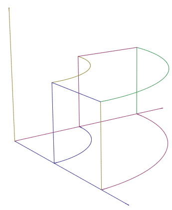
6.a)



Die Integrationsmenge
$D = \{(x,y)\,|\,0 \le y \le 1\,,\ (y-1)^2 \le x \le \frac{1}{2}\,(y-1)^2 + \frac{1}{2}\}\,.$

$$\begin{aligned}
\int\limits_D y\,d(x,y) &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{(y-1)^2}^{\frac{1}{2}\,(y-1)^2+\frac{1}{2}} y\,dx \right) dy = \int\limits_0^1 (y\,x)_{x=(y-1)^2}^{x=\frac{1}{2}\,(y-1)^2+\frac{1}{2}}\ dy \quad \textbf{3P} \\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2} y\ (y-1)^2 \right) dy = \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}\,y^3 + y^2 \right) dy \quad \textbf{1P} \\
&= \left(-\frac{1}{8}\,y^4 + \frac{1}{3}\,y^3 \right)_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{24}\,. \quad \textbf{1P}
\end{aligned}$$

6.b)



Die Integrationsmenge
$D = \{(x,y,z)\,|\,1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\,,\ x \ge 0\,, y \ge 0\,,\ 0 \le z \le 1\}.$

$$\begin{aligned}
\int\limits_D y\,d(x,y,z) &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_1^2 r\ \sin(\phi)\,r\,dr \right) d\phi \right) dz = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3}{3}\ \sin(\phi) \right)_{r=1}^{r=2} d\phi \right) dz \quad \textbf{3P} \\
&= \frac{7}{3} \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi)\,d\phi \right) dz = \frac{7}{3} \int\limits_0^1 (-\cos(\phi))_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}}\ dz = \frac{7}{3} \int\limits_0^1 dz = \frac{7}{3}\,. \quad \textbf{2P}
\end{aligned}$$